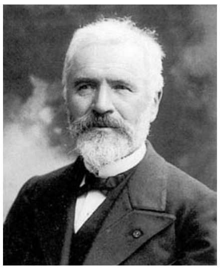
3 Réduction d'endomorphismes (1)

« Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin. »
Jean-Marie Souriau (1995)

Plan de cours

♦ **Introduction –** Étant donné un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, on cherche à déterminer une représentation matricielle de u de la forme la plus simple possible pour répondre à des objectifs aussi variés que le calcul des puissances successives, la résolution de systèmes différentiels linéaires, la résolution d'équations matricielles, la recherche du commutant…

Réduire l'endomorphisme u revient au fond à identifier au sein d'une classe de similitude de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donnée (l'ensemble des matrices représentatives de u) le ou les représentants les plus adaptés à ces objectifs. Pour y parvenir, il nous faudra « casser » l'espace E en somme directe de sous-espaces stables par u. En effet, dans une base adaptée, la matrice obtenue sera diagonale par blocs. Nous serons donc amenés à comprendre comment déterminer de tels sous-espaces et, s'ils existent, sous quelles conditions obtenir des blocs triangulaires, voire diagonaux.



Camille Jordan [1]

Dans un premier temps, et parce que la forme diagonale est de loin la plus avantageuse, faisons l'hypothèse qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ qui *diagonalise* u, c'est-à-dire pour laquelle la matrice associée est diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

Nécessairement, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En d'autres termes, $e_i \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)$. De plus, puisque $\mathscr{B}$ est une base, de tels vecteur e_i ne peuvent être nuls : les applications $u - \lambda_i \mathrm{id}_E$ ne sont pas injectives, donc non bijectives. Bref, $\det(u - \lambda_i \mathrm{id}_E) = 0$! En conclusion, si une telle base existe, les coefficients de la matrice diagonale sont à chercher parmi les valeurs de λ pour lesquelles $\det(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$.

Réciproquement, connaissant de telles valeurs λ, est-on en mesure de construire une base de diagonalisation ? Formulé autrement, peut-on décomposer E en somme directe de sous-espaces stables sur chacun desquels u va agir telle une homothétie ? La réponse sera hélas négative pour des endomorphismes ne respectant par certains critères, comme par exemple les endomorphismes nilpotents. La diagonalisation d'un endomorphisme ou d'une matrice ne constitue pas en ce sens une réduction « universelle ».

Ce premier chapitre consacré à la réduction vise à énoncer des premiers critères simples de diagonalisabilité et de trigonalisabilité. Il sera complété d'un deuxième opus où nous verrons comment les polynômes d'endomorphismes peuvent être efficacement mis au service de la réduction.

1. Camille Jordan (1838 – 1922), un des grands contributeurs à la théorie de la réduction.

I | Éléments propres d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K}$ désignant sauf mention contraire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u un endomorphisme de E.

A – Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres

Définition 3.1 : Valeur propre, vecteur propre

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.
- On dit alors que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.
- On appelle éléments propres de u les valeurs et vecteurs propres de u.
- Lorsque E est de dimension finie, on appelle spectre de u l'ensemble des valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$. Il sera par la suite noté $\mathrm{Sp}(u)$.

Quelques remarques en vrac :

- Un vecteur propre n'est jamais nul ! (sinon, tout scalaire serait valeur propre)
- En dimension finie, en notant M la matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ donnée, x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ ssi $MX = \lambda X$ avec X le vecteur coordonnées de x dans $\mathscr{B}$. On dira que X est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.
- x est un vecteur propre de u si et seulement si la droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

Considérons maintenant un scalaire λ et un vecteur x.

$$u(x) = \lambda x \iff (u - \lambda \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$$

Comme x est non nul, cela revient à dire que $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$, c'est-à-dire que $u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injective. En particulier, 0 est valeur propre de u si et seulement si u n'est pas injective.

Définition 3.2 : Sous-espace propre

Soit λ une valeur propre de u. On appelle sous-espace propre associé à λ l'ensemble $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

$E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel en tant que noyau d'endomorphisme. Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors $E_\lambda(u) = \{0_E\}$.

Exercice 1

Déterminer les éléments propres d'une homothétie, d'un projecteur et d'une symétrie vectorielle.

Proposition 3.3

Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors tout sous-espace propre de u est stable par v.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Pour tout $x \in E_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda x$, d'où $u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda v(x)$. Ainsi $v(x) \in E_\lambda(u)$. ■

Lorsque deux endomorphismes u et v commutent, on pourra introduire l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$. Cette idée, riche de conséquences, sera développée ultérieurement.

Dans la preuve précédente, on notera qu'il n'est pas acquis que $v(x)$ soit un vecteur propre de u : il se pourrait que $v(x) = 0_E$.

Lemme 3.4

Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
Autrement dit, si $\lambda \neq \mu$, alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(u - \mu \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

Démonstration

Si $\lambda \neq \mu$ et $x \in E_\lambda(u) \cap E_\mu(u)$, $u(x) = \lambda x = \mu x$. Donc $(\lambda - \mu)x = 0_E$ et même $x = 0_E$ puisque $\lambda \neq \mu$. ■

On généralise aisément ce résultat.

Théorème 3.5

La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Démonstration

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que la somme de p sous-espaces propres d'un endomorphisme u associés à des valeurs propres distinctes est directe.

(i) **Initialisation –** Il n'y a rien à démontrer pour $p = 1$; le résultat vient d'être démontré pour $p = 2$.

(ii) **Hérédité –** Supposons la propriété établie pour p sous-espaces propres. Montrons qu'elle est encore vraie pour $p+1$ sous-espaces propres. Considérons pour cela $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ valeurs propres deux à deux distinctes et $(e_1, \ldots, e_{p+1}) \in E_{\lambda_1} \times \ldots \times E_{\lambda_{p+1}}$ vecteurs propres associés tels que :

$$e_1 + \cdots + e_p + e_{p+1} = 0 \quad (*)$$

Ce qui nous donne, en applicant u :

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p + \lambda_{p+1} e_{p+1} = 0 \quad (**)$$

Multiplions $(*)$ par λ_{p+1} et soustrayons l'équation obtenue à $(**)$:

$$(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) e_1 + \cdots + (\lambda_p - \lambda_{p+1}) e_p = 0$$

L'hypothèse de récurrence conduit alors à $(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) e_1 = (\lambda_2 - \lambda_{p+1}) e_2 = \cdots = (\lambda_p - \lambda_{p+1}) e_p = 0_E$.
Ce qui, compte-tenu du fait que les valeurs propres sont distinctes, donne $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
En reportant dans l'équation initiale, il vient également $\lambda_{p+1} = 0_E$. ■

Corollaire 3.6

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration

La concaténation de familles libres d'espaces en somme directe est libre. Il suffit alors de considérer pour chaque sous-espace propre une famille (e_k) à un seul élément (non nul puisque c'est un vecteur propre). ■

Corollaire 3.7

En dimension finie, un endomorphisme ne peut admettre plus de $n = \dim(E)$ valeurs propres.

Démonstration

Une famille libre ne peut contenir plus de $\dim(E)$ vecteurs. ■

En dimension infinie, il peut cependant exister une infinité de valeurs propres.

Exemple 1

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P'$. Déterminons les éléments propres de φ.

$$\exists P \neq \tilde{0}, \quad \varphi(P) = \lambda P \quad \Longleftrightarrow \quad \exists P \neq \tilde{0}, \quad \lambda P = P'$$

Pour des questions de degré, seul 0 est valeur propre et $E_0(\varphi) = \operatorname{Ker} \varphi = \mathbb{R}_0[X] = \operatorname{Vect}(1)$.

Exemple 2

Soit $\psi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\psi(f) = f'$. Déterminons les éléments propres de ψ.

$$\exists f \neq 0, \quad \psi(f) = \lambda f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists f \neq 0, \quad \lambda f = f'$$

Aucune condition ne porte sur λ et nécessairement, $f = x \mapsto C e^{\lambda x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, tout réel λ est valeur propre de ψ et $E_\lambda(\psi) = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_E) = \{x \mapsto C e^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})$.
On en déduit à cette occasion que la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre. À retenir : identifier une famille de vecteurs comme une famille de vecteurs propres peut s'avérer efficace pour justifier la liberté de la famille.

B – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On suppose désormais E de dimension finie. Les notions de rang et déterminant pourront donc être employées.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } f \quad &\iff \quad \exists x \neq 0_E,\ u(x) = \lambda x \\
&\iff \quad \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff \quad u - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non injective} \\
&\iff \quad u - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non bijective } \ \textit{(dimension finie)} \\
&\iff \quad \det(u - \lambda \mathrm{id}_E) = 0 \quad \iff \quad \det(\lambda \mathrm{id}_E - u) = 0
\end{aligned}$$

La détermination de l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie peut donc « en théorie » se ramener à un simple calcul de déterminant et à une recherche de racines d'un certain polynôme.

Commençons par définir le polynôme caractéristique d'une matrice. La définition donnée nous oblige à travailler avec des matrices à coefficients dans le corps des fractions $\mathbb{K}(X)$. La théorie du déterminant exposée sur le corps $\mathbb{K}$ reste valable dans $\mathbb{K}(X)$.

Théorème / Définition 3.8 : Polynôme caractéristique d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de M et on note généralement χ_M le polynôme $\chi_M = \det(X I_n - M)$.

Démonstration

$$\chi_M = \det(X I_n - M) = \begin{vmatrix} X - m_{1,1} & -m_{1,2} & \cdots & -m_{1,n} \\ -m_{2,1} & X - m_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -m_{n-1,n} \\ -m_{n,1} & \cdots & m_{n,n-1} & X - m_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (X \delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}) \in \mathbb{K}[X].$$

Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

Proposition 3.9

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

Démonstration

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1} A P$. Alors,

$$\chi_B = \det(X I_n - B) = \det(X I_n - P^{-1} A P) = \det(P^{-1}) \det(X I_n - A) \det(P) = \chi_A$$

Théorème 3.10 : Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle polynôme caractéristique de u et on note généralement χ_u le polynôme caractéristique de toute matrice représentative.

Théorème 3.11

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. λ est valeur propre de u si et seulement si λ est racine de χ_u.

Exemple

Soit u définie sur $\mathbb{R}^3$ par $u(x, y, z) = (2y - z, 3x - 2y, -2x + 2y + z)$. Déterminons ses éléments propres.

En notant M la matrice de u dans la base canonique, il vient $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Après quelques calculs, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2, -4\}$ puis $E_1 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((4,3,-2))$ et $E_{-4} = \mathrm{Vect}((2,-3,2))$.
Notons que l'on obtient par concaténation une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Remarquons que $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement si $\det(M) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si M n'est pas inversible.

Notons aussi que par invariance du déterminant par transposition, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(M^\top)$.

Exercice 2

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \alpha$. Montrer que $\alpha \in \mathrm{Sp}(M)$.

Théorème 3.12 : Propriétés du polynôme caractéristique

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme $\chi_M = \det(XI_n - M)$ est de degré n et unitaire. De plus,

$$\chi_M = X^n - \mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$$

Démonstration

Rappelons que,

$$\chi_u = \det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (X\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})$$

où l'on a noté $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker.

- Comme annoncé, χ_u est bien un polynôme, de degré au plus n.
- Mais à y regarder de plus près, le seul terme de degré n apparaît dans la somme lorsque pour tout i compris entre 1 et n, $\sigma(i) = i$, c'est-à-dire lorsque $\sigma = \mathrm{id}$. Comme $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$, le terme correspondant dans la somme est $\prod_{i=1}^{n}(X - m_{i,i})$. χ_u est donc de degré n et unitaire.
- Aucun terme de la forme $\prod_{i=1}^{n}(X\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})$ ne peut être de degré $n-1$. Il faudrait pour cela que la permutation σ fixe exactement $n-1$ valeurs, sans fixer la dernière. La seule contribution de degré $n-1$ provient donc du développement du terme $\prod_{i=1}^{n}(X - m_{i,i}) = X^n - (m_{1,1} + m_{2,2} + \cdots + m_{n,n})X^{n-1} + \cdots$. On retrouve bien l'opposé de la trace de M.
- Le terme constant s'obtient en calculant $\chi_u(0) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n}(-m_{\sigma(i),i}) = (-1)^n \det(M)$. ■

Quel est le nombre de racines de χ_u donc de valeurs propres de u ?

Proposition 3.13

- Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n alors $u \in \mathscr{L}(E)$ admet exactement n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Lorsque E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$ en admet au plus n.

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. $\chi_A = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Dès lors, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\pm i\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$.

Plus généralement, pour deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ tels que $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(u)$.

Définition 3.14 : Ordre de multiplicité

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ de u, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de u.

Rappelons que α est une racine de $P \in \mathbb{K}[X]$ d'ordre de multiplicité p si et seulement si une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^p Q$ (ii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0$.

Exemple

$\chi_u = (X-1)(X-2)^2$ alors 1 est valeur propre simple de u et 2 valeur propre double.

Proposition 3.15

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, deux valeurs propres complexes conjuguées de M ont même ordre de multiplicité.

Proposition 3.16

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u.

Démonstration

Considérons une base $\mathscr{B}$ de F que l'on complète en une base $\mathscr{B}'$ de E. En posant $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{bmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_{|F}) & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad \text{et donc,} \quad \chi_M = \begin{vmatrix} XI_p - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_{|F}) & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant triangulaire par blocs. Ainsi, $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \times \det(XI_{n-p} - C)$, donc $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$. ■

Théorème 3.17

Soit λ une valeur propre de u d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$. Alors, $1 \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)) = \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$.

Démonstration

Soit λ une valeur propre de u. Posons $p = \dim(E_\lambda)$.

- Il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme $E_\lambda \neq \{0_E\}$, $p \geqslant 1$.
- De plus, $E_\lambda(u)$ est stable par u. L'endomorphisme induit par u a pour matrice λI_p, dans n'importe quelle base. Son polynôme caractéristique est $(X - \lambda)^p$.
  En vertu du lemme précédent, $(X - \lambda)^p$ divise χ_u, ce qui nous assure que $p \leqslant m(\lambda)$. ■

Corollaire 3.18

Si λ est racine simple, alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est de dimension 1.

Exemple

Si $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2, -4\}$. Les sous-espaces propres de M sont donc des droites vectorielles.

Exercice 3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Comparer les polynômes caractéristiques de A et $2A$. Que dire si A et $2A$ sont semblables ?

(ii) On suppose que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Comparer les polynômes caractéristiques de A et A^{-1}, de A et $\mathrm{Com}(A)$.

II | Diagonalisation d'un endomorphisme

Par la suite, u désignera toujours un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Définition 3.19 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme

L'endomorphisme u est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Dans une telle base, la matrice de u est de la forme $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ avec λ_i valeur propre de u.

Diagonaliser un endomorphisme, c'est déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de u.

Quelques remarques :

- Les λ_i apparaissent dans la matrice précédente autant de fois que leur ordre de multiplicité.
- La matrice de u dans une base quelconque est alors semblable à une matrice diagonale.

Exemples

id_E est diagonalisable ; un projecteur est diagonalisable.

Définition 3.20 : Diagonalisabilité d'une matrice

Par analogie, une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Rappel : Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres.

Attention, une matrice (ou un endomorphisme) n'est pas toujours diagonalisable ! De plus, l'ensemble des matrices (ou des endomorphismes) diagonalisables n'est pas stable par addition, ni par composition.

Exemple

Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Clairement, $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Si M était diagonalisable, $M = P \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Absurde !

Remarquons par ailleurs que $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

À quelle condition un endomorphisme est-il diagonalisable ? De façon grossière, il faut et il suffit qu'il admette *suffisamment* de vecteurs propres pour pouvoir former une base de E et ainsi construire une matrice diagonale. C'est exactement ce qu'expriment les théorèmes suivants. Mais rappelons auparavant que :

$$\begin{aligned} E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \quad & \overset{\text{déf.}}{\iff} \quad \forall x \in E \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \quad x = x_1 + \cdots + x_p \\ & \overset{\text{prop}}{\iff} \quad \text{la concaténation de bases de } F_1, \dots, F_p \text{ est une base de } E \\ & \overset{\text{prop}}{\iff} \quad \sum_{i=1}^{p} F_i \text{ est directe et } \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) \end{aligned}$$

Théorème 3.21 : Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (1)

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E obtenue par concaténation de bases des sous-espaces E_λ. Par définition, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ donc la matrice représentative de u dans cette base est diagonale.

$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de u, tout vecteur de E s'écrit bien comme combinaison linéaire d'éléments des sous-espaces propres E_{λ_i}. Par ailleurs, cette décomposition est unique puisque ces sous-espaces sont en somme directe (cf. section I). ■

Corollaire 3.22

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda)$.

Théorème 3.23 : Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (2)

L'endomorphisme u est diagonalisable ssi χ_u est scindé **et** pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda = m(\lambda)$.

Démonstration

Raisonnons là encore par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Notons α_i la dimension de E_{λ_i}. La matrice de u dans une base de diagonalisation est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{\alpha_p} \end{bmatrix}$$

Ainsi, $\chi_u = \chi_M = (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \times \cdots \times (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$. Le polynôme caractéristique de u est donc scindé et l'ordre de multiplicité de λ_i vaut $\dim(E_{\lambda_i})$ et ceci, quel que soit $i \in [\![1,p]\!]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que χ_u est scindé et que $m(\lambda) = \dim(E_\lambda)$ pour toute valeur propre λ. On a alors :

$$\dim(E) = \deg(\chi_u) \underset{\text{scindé}}{=} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m(\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda)$$

Corollaire 3.24

Si χ_u n'est pas scindé, u n'est pas diagonalisable.

Théorème 3.25 : Condition suffisante de diagonalisabilité

Si χ_u est scindé et n'admet que des racines simples, alors u est diagonalisable.

Démonstration

En effet, si λ est valeur propre simple de u alors $\dim E_\lambda = 1 = m(\lambda)$.

Pour les 5/2, rappelons comme résultat supplémentaire que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale.

Plan de diagonalisation — (hors cas particulier)

❶ Étude de la diagonalisabilité de u.
- On détermine χ_u.
- Si χ_u n'est pas scindé, u n'est pas diagonalisable. Dans $\mathbb{C}$, χ_u est toujours scindé.
- Si χ_u est scindé, on compare $\dim E_\lambda$ et $m(\lambda)$. À ce stade, il n'est pas utile de déterminer une base de E_λ. On remarquera que $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$. (théorème du rang)

❷ Diagonalisation de u lorsque c'est possible.
On détermine une base de E_λ pour chaque valeur propre en résolvant l'équation $MX = \lambda X$ et on concatène les bases obtenues.

Exemples

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \ ; \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{bmatrix} \ ; \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\chi_A = (X-2)(X-4)(X-6)$, A diagonalisable. $\chi_B = (X-2)(X-1)^2$ et $\dim E_1 = 1$ donc B n'est pas diagonalisable. $\chi_C = X(X^2+2)$, C diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour finir, on notera que diagonaliser un endomorphisme revient à l'exprimer comme une combinaison linéaire de projecteurs.

Exercice 4

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On note p_λ le projecteur spectral associé à λ, i.e. la projection sur $E_\lambda(u)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces propres. Montrer que p_λ est un polynôme en u.

Exercice 5

Trouver le spectre d'une matrice compagnon et une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité.

III | Trigonalisation d'un endomorphisme

1 – Définition

Définition 3.26 : Trigonalisabilité

- Un endomorphisme u de E est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 3.27

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Toute matrice est donc trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice triangulaire T (dont la diagonale est constituée par les valeurs propres de M) et P inversible telles que :

$$T = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons l'endomorphisme u trigonalisable. Il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, il est scindé.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Raisonnons par récurrence sur la dimension de E.

- **Initialisation –** Le résultat est vrai en dimension 1 puisque toute matrice représentative de u est triangulaire supérieure.
- **Hérédité –** Supposons le résultat établi au rang $n-1$, montrons qu'il est encore vrai au rang n.
  Le polynôme caractéristique de u étant scindé et de degré $n \geqslant 1$, il admet au moins une racine λ. En notant e_1 un vecteur propre associé, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, la matrice de u dans cette base est de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & \star \\ 0 & M' \end{bmatrix} \text{ où } M' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

  $\chi_M = (X-\lambda)\chi_{M'}$. $\chi_{M'}$ étant scindé, par hypothèse de récurrence, la matrice M' est trigonalisable. On peut alors écrire $T = P'^{-1}M'P'$ avec $P' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$. Considérons alors la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

  En effectuant un produit par blocs, il vient :

$$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & \star \\ 0 & M' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \bullet \\ 0 & P'^{-1}MP' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \bullet \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

  Cette dernière matrice est bien triangulaire, ce qui achève la démonstration par récurrence. ■

Proposition 3.28

La trace d'un endomorphisme est la somme de ses valeurs propres (complexes) et le déterminant son produit.

On rappelle que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\chi_M = X^n - \mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$$

Il suffit de développer le polynôme caractéristique et d'identifier :

$$\chi_M = (X-\lambda_1)\times\cdots\times(X-\lambda_n) = X^n - \underbrace{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}_{=\mathrm{Tr}(M)}X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \underbrace{\lambda_1\times\cdots\times\lambda_n}_{=\det(M)}$$

La trigonalisabilité de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ nous assure également que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(M^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} m(\lambda)\lambda^k$.

2 – Trigonalisation effective dans le cas où $n = 2$

On suppose χ_u scindé avec $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\dim E = 2$. On écrit alors $\chi_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.

❶ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, comme χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.
Dans une certaine base,

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

❷ Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, u est-elle diagonalisable ?
Si c'est le cas,

$$M = PDP^{-1} = P\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}P^{-1} = \lambda I_2$$

Et u vaut alors $\lambda \mathrm{id}_E$.
Sinon, $\dim E_\lambda = 1$. Soit $e_1 \in E_\lambda$, $e_1 \neq 0_E$ et on complète la famille libre (e_1) en une base (e_1, e_2) de E.
Dans cette base,

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda & \times \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

On peut toujours choisir e_2 de sorte que $\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

3 – Trigonalisation effective dans le cas où $n = 3$

On suppose χ_u scindé avec $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\dim E = 3$. On écrit χ_u sous la forme $\chi_u = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$.

❶ Si les λ_i sont distincts, χ_u étant scindé à racines simples, u est diagonalisable.
Dans une certaine base,

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

❷ Si λ_1 est racine simple et si $\lambda_2 = \lambda_3$, deux possibilités :

- soit $\dim E_{\lambda_2} = 2$ et u est diagonalisable.
- soit $\dim E_{\lambda_2} = 1$ et alors, u n'est pas diagonalisable.
  On choisit alors $e_1 \in E_{\lambda_1}$ et $e_2 \in E_{\lambda_2}$ non nuls que l'on complète en une base (e_1, e_2, e_3) de E.
  Dans cette base,

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

On essaie souvent de choisir (e_1, e_2, e_3) de sorte que $\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

❸ λ est racine triple. Là aussi, plusieurs possibilités :

- si $\dim E_\lambda = 3$ alors u est diagonalisable. $f = \lambda \mathrm{id}_E$.
- si $\dim E_\lambda = 2$ et alors on complète une base (e_1, e_2) de E_λ en une base (e_1, e_2, e_3) de E.
  Dans cette base,
$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
- si $\dim E_\lambda = 1$, la question est plus délicate et sera abordée en fin de chapitre.

Exercice 6

Réduire la matrice $M = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{bmatrix}$.

IV | Endomorphismes nilpotents

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 3.29 : Endomorphisme nilpotent

Un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers p.

Si l'on note $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent u, $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

On définit de façon analogue la propriété de nilpotence d'une matrice.

Exemple

La matrice $\begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ est nilpotente. Quel est son ordre de nilpotence ?

Proposition 3.30

L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est inférieur ou égal à $\dim(E)$.

Démonstration

Soit p l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent u. Comme $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrons alors que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.
Soit, pour cela, $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-2} u^{p-2}(x) + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$.
On applique successivement u, u^2, ..., u^{p-1} de telle sorte que, par nilpotence,

$$\begin{aligned} \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \cdots + \lambda_{p-2} u^{p-2}(x) + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) &= 0_E \\ \lambda_0 u(x) + \lambda_1 u^2(x) + \cdots + \lambda_{p-2} u^{p-1}(x) &= 0_E \\ &\vdots \\ \lambda_0 u^{p-2}(x) + \lambda_1 u^{p-1}(x) &= 0_E \\ \lambda_0 u^{p-1}(x) &= 0_E \end{aligned}$$

Comme $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, on trouve $\lambda_0 = 0$ puis, en remontant, on a successivement $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$.
Nous avons une famille libre de p vecteurs. Nécessairement, $p \leqslant \dim(E)$. ■

Ce résultat appelle plusieurs remarques. D'une part, on a obligatoirement $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ puisque $p \leqslant n$. D'autre part, si l'indice de nilpotence est maximal, c'est-à-dire s'il est égal à n alors la famille de vecteurs introduite dans la preuve est une base de E. On peut alors écrire la matrice de u dans la base $(u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \dots, u(x), x)$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et elle n'est clairement pas diagonalisable. Nous allons montrer plus généralement que 0 est la seule valeur propre complexe d'un endomorphisme nilpotent.

Proposition 3.31

Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement s'il est trigonalisable et si 0 est sa seule valeur propre.

Démonstration

Démontrons ce résultat par une approche matricielle.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la matrice M nilpotente. Quitte à travailler dans $\mathbb{C}$, soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. $MX = \lambda X$ et une récurrence simple donne $M^n X = \lambda^n X = 0$. Comme $X \neq 0$, il vient $\lambda = 0$. La seule valeur propre complexe de M est 0. $\chi_M = X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$, la matrice est trigonalisable.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si M est trigonalisable et de valeurs propres toutes nulles, alors M est semblable à $T = \begin{bmatrix} 0 & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Or $T^n = 0$ (via l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé). Il s'en suit que $M^n = 0$. ■

Exercice 7

Trigonaliser la matrice $M = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

V | Applications classiques de la réduction

A – Calcul de puissances

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer A^p par réduction de A.

❶ Si A est diagonalisable alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ où } P \text{ est constituée de vecteurs propres de } A.$$

Par récurrence, $A^p = (PDP^{-1})^p = PD^pP^{-1}$ avec $D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)$.

❷ Si A est trigonalisable alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$T = P^{-1}AP \text{ avec } T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Donc $A^p = (PTP^{-1})^p = PT^pP^{-1}$. Le calcul de T^p est cependant plus délicat que dans le cas précédent.

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D + N \text{ avec } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ et } N = \begin{bmatrix} 0 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N est nilpotente donc N^p se calcule aisément, tout comme D^p. À condition que N et D commutent, on peut utiliser la formule du binôme... Lorsque $n=2$ ou $n=3$, on cherchera généralement T sous la forme :

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 1\\ 0 & 0 & \mu\end{bmatrix}$$

Les puissances de T peuvent alors se calculer facilement.

B – Suites récurrentes linéaires

1 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $a\,u_{n+2}+b\,u_{n+1}+c\,u_n=0$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$. On suppose que $u_0, u_1\in\mathbb{R}$. On chercher à exprimer u_n en fonction de n.

Posons pour cela $X_n=\begin{bmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{bmatrix}$. $X_{n+1}=\begin{bmatrix}u_{n+2}\\ u_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}u_{n+1}-\frac{c}{a}u_n\\ u_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{b}{a} & -\frac{c}{a}\\ 1 & 0\end{bmatrix}X_n=AX_n$ avec $A=\begin{bmatrix}-\frac{b}{a} & -\frac{c}{a}\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

Par récurrence, $X_n=AX_{n-1}=A^2X_{n-2}=\cdots=A^nX_0=A^n\begin{bmatrix}u_1\\ u_0\end{bmatrix}$. Réduisons A pour déterminer A^n.

$$\chi_A=\begin{vmatrix}X+\frac{b}{a} & \frac{c}{a}\\ -1 & X\end{vmatrix}=X^2+\frac{b}{a}X+\frac{c}{a} \quad \text{donc} \quad \chi_A(X)=0\Longleftrightarrow aX^2+bX+c=0.$$

D'après ce qui précède, deux possibilités :

(i) A admet deux racines simples λ_1 et λ_2. A est diagonalisable et $A=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}P^{-1}$.

Donc $\begin{bmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{bmatrix}=X_n=P\begin{bmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{bmatrix}P^{-1}X_0$. Ainsi, il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$.
Lorsque les racines ne sont pas réelles, elles sont conjuguées :

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \quad u_n=\alpha\lambda^n+\beta\overline{\lambda}^n$$

Comme $u_n\in\mathbb{R}$, $u_n=\overline{u_n}$ conduit à $\beta=\overline{\alpha}$. En posant $\lambda=\rho e^{i\theta}$,

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n=\rho^n\left(\alpha e^{in\theta}+\overline{\alpha e^{in\theta}}\right)=2\rho^n\mathrm{Re}(\alpha e^{in\theta})=\rho^n(A\cos(n\theta)+B\sin(n\theta)) \text{ avec } A,B\in\mathbb{R}$$

(ii) A admet une racine double λ. Comme $A\neq\lambda I_2$, $A=P\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}P^{-1}$.

Donc $\begin{bmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{bmatrix}=X_n=P\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{bmatrix}P^{-1}X_0$. Il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(\alpha+n\beta)\lambda^n$.

Théorème 3.32 : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2}=a\,u_{n+1}+b\,u_n \quad (*)$

- Si l'équation possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n=\alpha\lambda_1^n+\beta\lambda_2^n$$

- Si l'équation possède une racine double r, il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n=(\alpha+n\beta)\lambda^n$$

- Si l'équation possède deux racines complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$, il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n=\rho^n(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta))$$

L'ensemble des suites vérifiant la relation $(*)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

2 – Suites récurrentes linéaires d'ordre p

On généralise aisément ce théorème à des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur.

Théorème 3.33

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$. L'ensemble des suites vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + a_{p-2} u_{n+p-2} + \dots + a_0 u_n \quad (*)$$

forme un espace vectoriel de dimension p.

Démonstration

Notons E_p l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation $(*)$.

- Montrons tout d'abord que E_p est un espace vectoriel.
  - La suite nulle vérifie bien la relation de récurrence $(*)$.
  - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E_p et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose alors $w_n = \lambda u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_p$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

    $$u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + a_{p-2} u_{n+p-2} + \dots + a_0 u_n \,; \quad v_{n+p} = a_{p-1} v_{n+p-1} + a_{p-2} v_{n+p-2} + \dots + a_0 v_n$$

    Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

    $$\begin{aligned} w_{n+p} = \lambda u_{n+p} + v_{n+p} &= a_{p-1}(\lambda u_{n+p-1} + v_{n+p-1}) + \dots + a_0(\lambda u_n + v_n) \\ &= a_{p-1} w_{n+p-1} + a_{p-2} v\, w_{n+p-2} + \dots + a_0 w_n \end{aligned}$$

- Montrons maintenant que E_p est de dimension p en établissant un isomorphisme entre E_p et $\mathbb{K}^p$. Considérons l'application $\varphi : E_p \to \mathbb{K}^p$ définie par $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, \dots, u_{p-1})$. C'est tout simplement l'application qui à une suite de E_p lui associe ses p premières valeurs. Cette application est bien linéaire et toute suite de E_p est entièrement définie par la donnée de p conditions initiales. Bref, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qui montre que E_p est de dimension p. ∎

Pour $p = 2$, on retrouve le résultat du paragraphe précédent.

Essayons d'obtenir une base de E_p. L'idée consiste là encore à transformer notre relation de récurrence scalaire d'ordre p en une récurrence vectorielle d'ordre 1. Posons pour cela :

$$X_n = \begin{bmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^p \,; \quad A = \begin{bmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \dots & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$$

Comme $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier n, on trouve $X_n = A^n X_0$. Ceci nous invite à réduire A pour calculer A^n. On pourra remarquer que le polynôme caractéristique de A n'est rien d'autres que $X^p - a_{p-1}X^{n+p-1} - \dots - a_0$.

Supposons maintenant que A admet p valeurs propres simples. A est alors diagonalisable. Il existe donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que :

$$\begin{bmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p^n \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} u_{p-1} \\ u_{p-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

u_n est donc une combinaison linéaire des λ_i^n et l'ensemble des suites vérifiant la relation $(*)$ est :

$$\mathrm{Vect}(n \mapsto \lambda_1^n, \dots, n \mapsto \lambda_p^n)$$

Comme la famille est génératrice et qu'elle comporte $p = \dim(E_p)$ vecteurs, c'est bien une base de E_p.

C – Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants est un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1 \\ x_2'(t) = a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n \end{cases}$$

Il peut s'écrire sous la forme $X'(t) = AX(t) + B$ avec, pour tout t dans un certain intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \,; \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Nous étudierons plus en détail ces systèmes linéaires dans un chapitre ultérieur ; nous exprimerons en particulier la solution générale à l'aide de l'exponentielle matricielle et justifierons l'existence et l'unicité de la solution dans le cas d'un problème de Cauchy (théorème de Cauchy-Lipschitz dans sa version linéaire). Retenons pour le moment que l'on peut facilement exprimer les solutions d'un tel système en réduisant la matrice A.

1 – Résolution de $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ donc $y_i(t) = C_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}$ avec $C_i \in \mathbb{R}$. D'où le résultat suivant :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} X_n$$

Les solutions s'écrivent comme des combinaisons linéaires des solutions $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t} X$ où X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Théorème 3.34

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Il existe alors une base $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, éventuellement multiples.
Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} X_1 + \cdots + C_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} X_n \quad \text{avec} \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}$$

On notera qu'il est inutile de calculer P^{-1} pour déterminer X. De plus, pour une matrice diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ seulement, il suffit d'extraire parties réelle et imaginaire pour trouver les solutions réelles.

Exercice 8

Résoudre les systèmes : $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -x_1 + 3x_2 \end{cases}$

2 – Résolution de $X' = AX$ lorsque A est trigonalisable

On notera que cela est toujours possible, quitte à travailler dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Supposons que $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$. Avec les notations précédentes,

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t) = T\,Y(t) \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + t_{12}\,y_2(t) + \cdots + t_{1,n}\,y_n(t) \\ \qquad\quad y_2'(t) = \lambda_2\,y_2(t) + \cdots + t_{2,n}\,y_n(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad y_n'(t) = \lambda_n\,y_n(t) \end{cases}$$

On détermine alors y_n puis on remonte... On calcule ensuite $X = P\,Y$ (il est toujours inutile de calculer P^{-1}).

3 – Application aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

L'étude des systèmes différentiels est en partie motivée par le fait que toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène, au moyen de l'équivalence suivante, à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_{n-1} x^{(n-1)} \iff X' = AX \text{ avec } X = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

On cherchera seulement à résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants suivante :

$$a\,x'' + b\,x' + c\,x = 0 \quad (a \neq 0)$$

Commençons par *vectorialiser* l'équation pour se ramener à une équation d'ordre 1. Posons pour cela $X = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}, \quad \text{soit} \quad X' = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A ne sont rien d'autres que les racines de l'équation (caractéristique !) $a\,r^2 + b\,r + c = 0$. Sans aucune surprise, trois cas sont sont envisageables.

(i) Si A admet deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2 distinctes, A est diagonalisable.
Il existe alors $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} X_1 + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} X_2$$

x est donc combinaison linéaire de $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et de $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$.

(ii) Si A admet deux valeurs propres complexes non réelles conjuguées λ et $\overline{\lambda}$, A est diagonalisable.
On peut donc écrire $x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\lambda t} + C_2 \mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}$ avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$. Écrivons λ sous la forme $\alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$.
Comme les solutions recherchées sont réelles, on a, en particulier :

$$x(0) = C_1 + C_2 \in \mathbb{R}\,; \qquad x\left(\frac{\pi}{2\beta}\right) = i\,\mathrm{e}^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}(C_1 - C_2) \in \mathbb{R}$$

Ce qui conduit à $C = C_1 = \overline{C_2}$, puis :

$$x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(C\mathrm{e}^{i\beta t} + \overline{C\mathrm{e}^{i\beta t}}\right) = 2\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{Re}\left(C\mathrm{e}^{i\beta t}\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(c_1\cos(\beta\,t) + c_2\sin(\beta\,t)\right) \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

x est ainsi une combinaison linéaire (à coefficients réels) de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta\,t)$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta\,t)$.

Exercice 9

À quelle(s) condition(s) sur α et β les solutions obtenues sont-elles bornées sur $\mathbb{R}_+$?

(iii) Si A admet une valeur propre double λ, A n'est pas diagonalisable.
En effet, A serait alors semblable donc égale à λI_2 ce qui n'est pas possible au vu de la forme de A.
Elle est cependant trigonalisable ! Il existe même $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $T = P^{-1}AP$ avec $T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

$$X' = AX \iff X' = PTP^{-1}X \iff P^{-1}X' = TP^{-1}X \iff Y' = TY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

Le nouveau système obtenu est alors de la forme :

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda y_2(t) \end{cases}$$

On trouve alors $y_2(t) = c_1 e^{\lambda t}$ puis $y_1'(t) = \lambda x_1(t) + c_1 e^{\lambda t}$ donc $x(t) = (c_1 t + c_2)e^{\lambda t}$.
En conclusion, x est une combinaison linéaire de $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto t e^{\lambda t}$.