Université Dr. Moulay Tahar
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2024-2025
2ème année LMD
Algèbre 3

TD 01 : Déterminants

Exercice 1. 1. *Décomposer en facteurs premiers de* $\mathbb{N}^*, 451, 2706, 1804$ *et* 2255.

2. *En déduire que*

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

3. *Montrer sans le calculer que le déterminant* Δ *est divisible par* 13,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 9 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

Exercice 2. *Soit* A *une matrice anti-symétrique d'ordre* $2n+1$. *Montrer que* $\det A = 0$. *Ce résultat est il encore vrai si* A *est d'ordre pair ?*

Exercice 3. *Montrer que pour* $n > 2$,

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix} = 0, \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4. *Soit* $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$ *et*

$$D = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

1. *Monter que* $\det D = \det A \det B$.
2. *Montrer que si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *alors*

$$det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = det(A+B)\, det(A-B).$$

Exercice 5. *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 6. 1. *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & a_2 \\ a_1 & & & & a_1 \end{vmatrix}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer*

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & \cdots & \cdots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & \cdots & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Exercice 7. *Soient $x, a_0, \ldots, a_n$ des réels et Δ_n le déterminant d'ordre $(n+1)$ suivant*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 8. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$, n réels distincts, calculer pour tout x le déterminant d'ordre $(n+1)$*

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & & & 1 \\ a_1 & a_2 & x & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$