N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

---

UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Présenté par: BRAHIMI Halima
SOBTI Naouel
SENIGRA Fatma

Thème

Théorème du point fixe de Banach

Soutenu le …juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. ZAOUECHE EL-Mehdi	MA (A) Univ. El Oued	Président
Mr. BILOUL Said	MC (B) Univ. ElOued	examinateur
Mr. BEGGAS Mohammed	MA (A) Univ. ElOued	Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Remerciements

Nous remercions Allah le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience pour l'accomplissement de ce travail.

Nous remercions les chers parents qui nous ont donné la volonté pour la réussite dans notre vie.

Nous exprimons toutes nos gratitudes à **"Mr BEGGAS Mohammed"**, pour l'effort fourni, les conseils prodigués, sa patience et sa persévérance dans le suivi.

Cela a été un plaisir et un honneur de travailler avec quelqu'un d'aussi compétent et d'aussi cultivé.

ainsi qu'à les professeurs "**DOUDI Nadjet, MEDEKHEL Hamza, BEN ALI Brahim, BELOUL Said, YAMBOAI Amine**".

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, pour leurs aides inestimables, qui nous ont donné les bases de la science.

Nous remercions très sincèrement, les membres de jury d'avoir bien voulu accepter de faire partie de la commission d'examinateur.

Nous tenons à remercier aussi l'ensemble du personnel de faculté des sciences et technologies et surtout département électronique.

A toute personne qui a participé de près ou de loin pour l'accomplissement de ce modeste travail particulièrement: **"Zahira, Aicha, Farouk"**.

Notations générales

E	ensemble non vide.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réelles.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réelles positive.
$\frac{\partial u}{\partial v}$	la dérivée directionelle vers l'extérieure.
d	distance.
$\Vert . \Vert$	norme.
f	application.
$\{x_n\}$	suite.
d_1	$= \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert .$
d_2	$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$
d_∞	$= \max_{1 \leq i \leq n} \lvert x_i - y_i \rvert .$
$\Vert A \Vert_{1,\infty}$	$= \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \right) .$
$\Vert A \Vert_{1,1}$	$= \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert \right) .$
$\Vert A \Vert_{2,2}$	$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lvert a_{ij} \rvert^2 .$
$B(x_0, r)$	boule ouvert de centre x_0 et rayon r.
$\overline{B(x_0, r)}$	l'adhérence de $B(x_0, r)$.
$C([a, b])$	espace des applications continues.

Table des matières

Introduction

Le théorème du point fixe a une trés grande importance taut théorique que pratique. En effet, de très nombreux problèmes peuvent se présenter sous la forme de recherche du point fixe.

Ce théorème a un champ d'applications très vaste, et il rend encore bien des services à l'heure actuelle, tant en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

pour nous on s'interesse dans ce travail au théorème du point fixe de Banach qui présente la base de la théorie du point fixe basé sur les applications cantractantes.

Le théorème du point fixe de Banach est à la base de la démonstration de principaux théorèmes d'analyses: théorème d'inversion local, théorème des fonctions implicites, théorème d'existences et d'unicité des solutions d'équations différentielles et intégrales.

Du point de vue pratiques, la démonstration du théorème basé sur les approximations successives offrant un algorithme de recherche du point fixe plus un contrôle sur l'erreur commise.

Révenons à notre travail, cette mémoire est composé de trois chapitres:

le premier chapitre est consacré aux notions et résultats générales utiles pour la suite. Tant qu'au deuxième chapitre, on propose notre théorème avec une démonstration bien detaillée plus des remarques importantes. par la suite, on va étudier des extensions du théorème basés sur la notion de contraction.

Dans le dernier chapitre, on a choisit des problèmes d'analyse où intervient le théorème du point fixe pour l'existence et l'unicité de solution, et un modèle numérique où on approche de la solution a partir de ce théorème.

En terminant cette mémoire par une conclusion dont on résume notre travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre a consacré à l'introduction de quelques notions fondamentales et certains définitions des espaces métriques qui seront utiles pour le développement ultérieur de notre travail. Nous faisons également un rappel du certains théorèmes et des résultats que nous utiliserons dans les chapitres 2 et 3.

1.1 Distances et espaces métriques

1.1.1 Distances

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble non vide. Une distance (ou métrique) sur E est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant aux propriétés suivantes:*
a) $\forall x, y \in E$, $d(x,y) \geq 0$ *et* $d(x,y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.
b) $d(x,y) = d(y,x)$, *(symétrique).*
c) $\forall x, y, z \in E$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, *(inégalite triangulaire).*

Exemple 1.1.1 $D(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ *est une distance sur un ensemble non vide E si d est une distance sur E car:*
a)

$$D(x,y) = 0 \tag{1.1.1}$$

$$\begin{aligned}
(1.1.1) &\iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \\
(1.1.1) &\iff d(x,y) = 0 \\
(1.1.1) &\iff x = y
\end{aligned}$$

D'où la condition (a).

b)

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \\
&= \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} \\
&= D(y,x)
\end{aligned}$$

D'où la condition (b).

c) enfin, concernant l'inégalite triangulaire (c), on procède comme suit, on voit que

$$\begin{aligned}
D(x,y) &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \\
&= 1 - \frac{1}{1+d(x,y)}
\end{aligned}$$

Grace à l' inégalite triangulaire vérifiée par d on peut écrire:

$$\begin{aligned}
d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\
d(x,z) + 1 &\leq d(x,y) + d(y,z) + 1 \\
\frac{1}{d(x,z)+1} &\geq \frac{1}{d(x,y)+d(y,z)+1} \\
-\frac{1}{d(x,z)+1} &\leq -\frac{1}{d(x,y)+d(y,z)+1} \\
1 - \frac{1}{d(x,z)+1} &\leq 1 - \frac{1}{d(x,y)+d(y,z)+1} \\
\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}
\end{aligned}$$

En passant au même dénominateur, on obtient:

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

Donc

$$\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}$$

Alors

$$D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z)$$

Exemple 1.1.2 $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, $x, y \in \mathbb{R}^*$ *est une distance sur* $\mathbb{R}^*$ *car:*

a)

$$d(x,y) = 0 \tag{1.1.2}$$

$$\begin{aligned} (1.1.2) &\iff \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = 0 \\ (1.1.2) &\iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \\ (1.1.2) &\iff x = y \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \\ &= \left|(-1)\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)\right| \\ &= |-1|\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right| \\ &= \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\right| \\ &= \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right| \end{aligned}$$

Donc

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Exemple 1.1.3 $\delta(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$ *est une distance sur un ensemble non vide* E *si* d *est distance sur* E *car:*

a)

$$\delta(x,y) = 0 \tag{1.1.3}$$

$$\begin{aligned} (1.1.3) &\iff \ln(1+d(x,y)) = 0 \\ (1.1.3) &\iff 1+d(x,y) = 1 \\ (1.1.3) &\iff d(x,y) = 0 \\ (1.1.3) &\iff x = y \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \delta(x,y) &= \ln(1+d(x,y)) \\ &= \ln(1+d(y,x)) \\ &= \delta(y,x) \end{aligned}$$

c) On a d distance alors:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \tag{1.1.4}$$

$$
\begin{aligned}
(1.1.4) &\iff 1 + d(x,z) \leq 1 + d(x,y) + d(y,z) \\
(1.1.4) &\iff 1 + d(x,z) \leq 1 + d(x,y) + d(y,z) + d(x,y)\, d(y,z) \\
(1.1.4) &\iff 1 + d(x,z) \leq (1 + d(x,y))\,(1 + d(y,z)) \\
(1.1.4) &\iff \ln(1 + d(x,y)) \leq \ln(1 + d(x,y))\,(1 + d(y,z)) \\
(1.1.4) &\iff \ln(1 + d(x,y)) \leq \ln(1 + d(x,y))\,(1 + d(y,z)) \\
(1.1.4) &\iff \ln(1 + d(x,y)) \leq \ln(1 + d(x,y)) + \ln(1 + d(y,z))
\end{aligned}
$$

Donc

$$\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$$

1.1.2 Distances équivalentes

Définition 1.1.2 *On dit que deux distances d_1, d_2 sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que:*

$$\alpha.d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta.d_1(x,y)$$

pour tous $x, y \in E$.

Exemple 1.1.4 *Soit $(d_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille finie de p distances sur E_i. On pose $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$, et on définit sur le produit cartésien $E \times E$ deux distances comme suit:*
Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de E on pose:

$$
\begin{aligned}
D_1(x,y) &= \sup_{1 \leq i \leq p} d_i(x_i, y_i) \\
D_2(x,y) &= \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i)
\end{aligned}
$$

On a

$$\begin{aligned}\sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i,y_i) &\leq \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i) \leq p \sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i,y_i)\\ D_1(x,y) &\leq D_2(x,y) \leq pD_1(x,y)\end{aligned}$$

Alors D_1 *et* D_2 *sont équivalents telle que* $\alpha = 1$, $\beta = p$

1.1.3 Espaces métriques

Définition 1.1.3 *On appelle espace métrique tout ensemble non vide* E *muni d'une distance. Un tel espace sera noté dans la suite* (E,d).

Exemple 1.1.5 *L'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$ *muni de la distance usuelle*

$$d(x,y) = |x-y| \quad x,y \in E$$

est un espace métrique.

Exemple 1.1.6 *Sur l'espace* $\mathbb{R}^n$, *on peut défini plusieurs distances, on faisan intervenir les distances entre les composantes. Soint* $x = (x_1,..,x_n)$ *et* $y = (y_1,..,y_n) \in E$. *On définit deux distances, à savoir:*

$$d_\infty(x,y) = \left\{\max_{i=1,..,n} |x_i - y_i|\right\}$$

et

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1,..,n} |x_i - y_i|$$

La troisième est celle qu'on appelle la distance euclidienne

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1,..,n} |x_i - y_i|^2}.$$

Exemple 1.1.7 *(Distance produit). Soient* (X,d_X) *et* (Y,d_Y) *deux espaces métriques, on peut définir une distance sur l'espace produit* $X \times Y$ *par:*

$$d[(x_{1,}y_1),(x_2,y_2)] = \sup\{d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2)\}.$$

1.2 Normes et espaces vectoriels normés

1.2.1 Normes

Définition 1.2.1 *Une norme sur un espace vectoriel E est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}_+$ noté par:*

$$x \to \|x\|$$

vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\forall x \in E$, $\|x\| \geq 0$ *et* $(\|x\| = 0) \iff (x = 0)$, (*séparation*).

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|$, *où* $|\lambda|$ *désigne respectivement la valeur absolue si* $\Bbbk = \mathbb{R}$ *ou module si* $\Bbbk = \mathbb{C}$, (*homogènété*).

c) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (*inéaglité du triangle*).

Exemple 1.2.1

$$\|(x, y)\| = \sup_{t \in [0,1]} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$ *car:*

a)

$$\begin{aligned} \forall (x, y) &\in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, 1] \\ \|(x, y)\| &\geq 0 \iff \sup_{t \in [0,1]} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}} \geq 0 \quad \textit{car:} \quad |x - ty| \geq 0 \quad \textit{et} \quad \sqrt{1 + t^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, 1] \ , \quad \|(x, y)\| = 0 \tag{1.2.1}$$

$$\begin{aligned} (1.2.1) &\iff \sup_{t \in [0,1]} \frac{|x + ty|}{\sqrt{1 + t^2}} = 0 \\ (1.2.1) &\iff |x + ty| = 0 \\ (1.2.1) &\iff x + ty = 0 \\ (1.2.1) &\iff x = 0 \wedge y = 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) &\in \mathbb{R}^2,\ t \in [0,1] \\
\|\lambda (x,y)\| &= \|(\lambda x, \lambda y)\| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \frac{|\lambda x + \lambda t y|}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} |\lambda| \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} \frac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= |\lambda| \|(x,y)\|
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) &\in \mathbb{R}^2\ ,\forall t \in [0,1] \\
\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| &= \|(x_1+x_2),(y_1+y_2)\| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \frac{|(x_1+x_2)+t(y_1+y_2)|}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \frac{|x_1+x_2+ty_1+ty_2|}{\sqrt{1+t^2}} \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \left(\frac{|x_1+ty_1|}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{|x_2+ty_2|}{\sqrt{1+t^2}} \right) \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \frac{|x_1+ty_1|}{\sqrt{1+t^2}} + \sup \frac{|x_2+ty_2|}{\sqrt{1+t^2}}
\end{aligned}$$

donc

$$\|(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\| \leq \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$$

Exemple 1.2.2

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ 1 \leq p < \infty\ \ \|x\|_p = \left(\sum_{i=1,..,n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Cette formule définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1.2.2 Normes équivalentes

Définition 1.2.2 *On dit que deux normes $\|x\|_1, \|x\|_2$ sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que*

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

pour tous $x, y \in E$.

1.2.3 Espaces vectoriels normés

Définition 1.2.3 *On appelle espace vectoriel normé* $(E, \|.\|)$ *tout espace vectoriel* E *sur le corps* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *muni d'une norme.*

Proposition 1.2.1 [10] *Si* $(E, \|.\|)$ *est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par:*

$$d_{\|.\|}(x, y) = \|x - y\|$$

On vérifie sans peine que les propriétés de (a) à (c) de la définition de distance sont satisfaites.

1.2.4 Norme matricielle

Définition 1.2.4 *soit* $\|.\|$ *une norme vectorielle sur* $E = \mathbb{R}^n$.
On appelle une matricielle induite, par cette norme vectorielle, sur $M_N(\mathbb{R})$, *qu'on note encore par*

$$\|.\| : A \to \|A\| = \sup \{\|Ax\|, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \ \|x\| = 1\}$$

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \sup_{\|x\|_1 = 1} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \\
\|A\|_2 &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \\
\|A\|_\infty &= \sup_{\|x\|_\infty = 1} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}|
\end{aligned}$$

Proposition 1.2.2 [2] *Soit* $A \in M_N(\mathbb{R})$

$$\|A\|_2 \iff \rho(A)$$

$\rho(A)$: *Le rayon spectral d'une matrice* A.

Exemple 1.2.3 *Dans $\mathbb{R}^n$ on peut définir plusieurs normes:*

La norme euclidienne:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1,..,n} x_i^2}$$

Que l'on note aussi $\|x\|_2$

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,..,n} \{|x_i|\}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1,..,n} |x_i|$$

Exemple 1.2.4 *L'espace vectoriel* $C([0,1],\mathbb{R})$ *peut être muni des normes:*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \{|f(t)|\}\,, \text{ (La norme de convergence uniforme).}$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(t)]^2 dt}$$

Exemple 1.2.5 *(Norme produit). Si* $(E, \|.\|_E)$ *et* $(F, \|.\|_F)$ *sont des espaces normés, on peut définir une norme sur l'espace vectoriel* $E \times F$ *par:*

$$(x,y) \in E \times F, \qquad \|(x,y)\| = \sup\{\|x\|_E\ , \|y\|_F\}$$

1.3 Suites de Cauchy et espaces complets

1.3.1 Suites de Cauchy

Définition 1.3.1 *On dit que la suite* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans l'espace métrique* (E,d) *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \backslash \forall n, m \in \mathbb{N} : n > m \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

On écrit alors:

$$\underset{n,m\to\infty}{d(x_n, x_m) \to 0}$$

Exemple 1.3.1 $(U_n) = e^{-n}$ *est une suite de Cauchy car pour tout couple d'entiers naturels* (n, m) *tels que* $n > m$*:*

$$|U_n - U_m| = \left|e^{-n} - e^{-m}\right| = e^{-m} - e^{-n} < e^{-m}$$

soit ε *un réel strictement positif. Si* $\varepsilon \in [1, +\infty[$, *l'inégalité* $e^{-m} \leq \varepsilon$ *est vraie quel que soit l'entier* m*. Si* $\varepsilon \in]0, 1[$, *cette même inégalité est vraie pour tout* $m \geq -\log \varepsilon$*. Ainsi, il suffit de prendre* $N_\varepsilon = [-\log \varepsilon] + 1$.

Exemple 1.3.2 *On munit l'ensemble* $C([0, 1], \mathbb{R})$ *de la distance fondamentale* d_1 *et considère les suites* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *définies par:* $f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \begin{cases} n & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & si \quad \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n et m de $\mathbb{N}^*$, avec $n > m$, on écrit:

$$\begin{aligned} d_1 \ (f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - m)\, dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - m\right) dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{m}{n^2}\right) + 2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - m\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ dans le critère de Cauchy.

Proposition 1.3.1 [10] *Toute suite convergente d'un espace métrique* (E, d) *est de Cauchy:*

Preuve. si $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = a$, cela veut dire que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } \forall n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, a) < \varepsilon$$

Et donc

$$\forall n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} \implies d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Exemple 1.3.3 *Par contre il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas:*
dans l'espace $]-1,+1[$ *la suite* $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de Cauchy, puisque la méme suite converge dans* $\mathbb{R}$ *vers 1, mais* $1 \notin]-1,+1[$

1.3.2 Espaces complets

Définition 1.3.2 *Un espace métrique* (E,d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* E *converge (dans* E*).*

Exemple 1.3.4 *l'espace* $E = C([a,b],\mathbb{R})$*, muni de la distance fondamentale* d_∞ *est complet. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy de* E*. On a:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ /\ \forall n,m \in \mathbb{N}:\ n > m \geq N_\varepsilon \implies d_\infty(f_n, f_m) \leq \varepsilon$$

autrement dit:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}/\forall n,m \in \mathbb{N} : n > m > N_\varepsilon \Rightarrow \sup_{a\leq x\leq b} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \tag{1.3.1}$$

Il en résulte que pour tout x *de* $[a,b]$*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans l'espace complet* $(\mathbb{R},|.|)$*. Elle est donc convergente. Soit* $f(x)$ *sa limite. Il nous suffit à présent de s'assurer que:*
a) f *est un élément de* E*.*
b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *(relativement à* d_∞*).*
Pour le premier point, il suffit de montre que f *est continue sur* $[a,b]$*. Considérons pour cela un point* x_0 *de* E*. Il vient:*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) \underset{(I)}{-} f_n(x)| + |f_n(x) \underset{(II)}{-} f_n(x_0)| + |f_n(x_0) \underset{(III)}{-} f(x_0)| \end{aligned}$$

Estimons les trois quantités (I)*,* (II) *et* (III)*. Soit* $\varepsilon > 0$*, pour* (I) *et* (III) *on remarque que:*

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\backslash\ n \geq N_\varepsilon \implies (I) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$
$$\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}\backslash\ n \geq N'_\varepsilon \implies (III) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Grâce à la convergence de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. *D'autre part, il existe un réel* $\rho > 0$ *tel que:*

$$|x - x_0| \leq \rho \implies (II) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En prenant $N''_\varepsilon = \max\left(N_\varepsilon, N'_\varepsilon\right)$ *on obtient:*

$$|x - x_0| \leq \rho \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Donc f *est continue en* x_0*, par suite, sur* $[a, b]$.

La seconde condition se démontre comme ceci:

Pour $p \geq N_\varepsilon$ *et* x *dans* $[a, b]$*, tous deux fixés quelconques, on peut passer à la limites dans la relation* (1.3.1) *quand* q *tend vers* $+\infty$. *En vertu de la continuité de la valeur absolue on obtient:*

$$\forall p \geq N_\varepsilon,\ \forall x \in [a, b] : \ |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc

$$p \geq N_\varepsilon \implies \sup_{a\leq x\leq b} |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

Exemple 1.3.5 *Soient* (E_i, d_i) $i = 1, .., n$ *des espaces complets. Alors* $E = \prod_{i=1,\ldots,n} E_i$ *muni de la distance produit* $d_\infty = (d_1, .., d_n)$ *est un espace complet. En particulier, l'espace produit* $\mathbb{R}^n$ *l'est aussi pour la norme produit.*

Exemple 1.3.6 *L'espace* $C([0, 1], \mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|.\|_1$ *n'est pas complet. Pour le voir, il suffit de remarquer que la suite des fonctions continues*

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^n t^n & si\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 & si\ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

est de Cauchy car:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\| &= \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\, dt \\ &= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \end{aligned}$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, sa limite $f(t)$ devrait être nulle dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et égale à 1 dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

1.4 Espace de Banach

Définition 1.4.1 *Un espace de Banach est un espase vectoriel normé complet. Sur le corps* $\Bbbk$ *des réels ou des complexes* ($\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$)*, avec leur normes usuelles de Banach.*

Exemple 1.4.1 *l'espace* $\mathbb{R}^n$ *est un espace de Banach pour la norme euclidienne.*

Proposition 1.4.1 [7] *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

1.5 Les contractions

1.5.1 Continuité

Définition 1.5.1 *Soit deux espaces métriques* (E, d_E) *et* (F, d_F) *et* f *une application de* E *dans F. Soit a un point de E.*
On dira que (f *est continue en a) si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \backslash\ \forall x \in E,\ d_E(x, a) < \alpha \implies d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Si l'application f est continue en tout point a de E, on dit qu'elle est « continue sur E », ou plus simplement (continue).

1.5.2 La continuité uniforme

Définition 1.5.2 *On dit que* f *est uniformément continue sur* E *si et seulement si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \backslash\ \forall x, x^{'} \in E,\ d_E(x, x^{'}) < \alpha \implies d_F(f(x), f(x^{'})) < \varepsilon$$

$\alpha\,(\varepsilon)$ *ne depend pas de* x, x'.

1.5.3 Application Lipschitzienne

Définition 1.5.3 *On dit qu'une application* $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *est de Lipschitz (ou Lipschitzienne) de rapport* $K > 0$ *(ou* $k -$ *Lipschitzienne) si elle satisfait:*

$$\forall x, y \in E \ d_F\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq K d_E\left(x, y\right).$$

Exemple 1.5.1 *Soit* $E \subset (\mathbb{R}_+, |.|)$ *et la fonction* f *définit par* $f(x) = \frac{x}{1+x}$ *est Lipschitzienne car:*

$$\begin{aligned}
\forall\left(x, y\right) &\in \mathbb{R}_+, \\
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \\
&= \left|\frac{x\left(1+y\right) - y\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}\right| \\
&= \left|\frac{x + xy - y - yx}{\left(1+x\right)\left(1+y\right)}\right| \\
&= \frac{|x-y|}{\left(1+y\right)\left(1+x\right)} \\
&\leq |x-y|
\end{aligned}$$

Donc f *est* $1 -$ *Lipschitzienne sur* $\mathbb{R}_+$ *donc elle l'est aussi sur* $\mathbb{R}$ *(puisque* f *impaire).*

Corollaire 1.5.1 [10] *Soit* f *dérivable sur un intervalle* I*.*
Alors:

$$\left(f \text{ est Lipschitzienne sur } I\right) \iff \left(f' \text{ est bornée sur } I\right).$$

Preuve.
$(\Longrightarrow)$ Supposons f Lipschitzienne sur I :

$$\begin{aligned}
\exists k &\in \mathbb{R}_+^*, \forall (x,y) \in I^2 \ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y| \\
-k &\leq \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|} \leq k
\end{aligned}$$

On déduit, par passage à la limite lorsque y tend vers x

$$-k \leq f'(x) \leq k$$

Ceci, quelque soit $x \in I$. Donc $f^{'}$ est bornée sur I.

$(\Longleftarrow)$ Supposons $f^{'}$est bornée sur I :

$$\exists M \in \mathbb{R}_{+}^{*}, t \in I, \quad \left|f^{'}(t)\right| \leq M$$

D'aprés l'inégalité des acroissements finis appliquée à f sur le segment $[x, y]$

$$|f(y) - f(x)| \leq M\,|y - x|$$

Donc f est $M-Lipschitzienne$.

Evidemment, par contraposition on a pour f dérivable sur un intervalle I

$$(f \text{ est non Lipschitzienne sur } I) \Longleftrightarrow \Big(f^{'}\text{n'est pas bornée sur } I\Big).$$

■

1.5.4 Applications contractantes

Définition 1.5.4 *On dit qu'une applications f est contractante si f $K-Lipschitzienne$ telles que* $0 < K < 1$.

Exemple 1.5.2 *Soit $E = \left(\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[, |.|\right)$, et f une fonction définit de E dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$ est contractante par ce que*

$$\begin{aligned}
\forall x, y &\in E \\
|f(x) - f(y)| &= \left|\frac{2x+6}{3x+2} - \frac{2y+6}{3y+2}\right| \\
&= \left|\frac{14(y-x)}{(3x+2)(3y+2)}\right| \\
&\leq \frac{14}{16}|x - y| \\
&= \frac{7}{8}|x - y|
\end{aligned}$$

Donc $k = \frac{7}{8}$.

Exemple 1.5.3 *L'application* $x \to \sqrt{x}$ *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}_+$, *mais non Lipschitzienne.*

Remarque 1.5.1 *Finissant cette paragraghe par les implications suivantes:*
(f contractante) $\Longrightarrow$ *(f Lipschitzienne)* $\Longrightarrow$ *(f uniformément continue)* $\Longrightarrow$ *(f continue).*

Chapitre 2

Théorème du point fixe de Banach

Dans ce chapitre nous présentons le théorème du point fixe dans un espace métrique complet et sa version dans un espace de Banach, avec des remarques sur le théorème et la signification, aussi quelques extensions du principe de l'application contracante.

2.1 Point fixe

Définition 2.1.1 *On dit que a point fixe pour une application f si:*

$$f(a) = a$$

Exemple 2.1.1 *Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:*

$$f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$$

On cherche les points fixes de f

$$f(x) = x \tag{2.1.1}$$

$$\begin{aligned} (2.1.1) &\iff \frac{2x+6}{3x+2} = x \\ (2.1.1) &\iff 3x^2 = 6 \\ (2.1.1) &\iff x^2 = 2 \\ (2.1.1) &\iff x = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Alors f admet deux points fixes dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.1.2 *Soit g une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:*

$$g(x) = 1 + 2x$$

On chercher les points fixes de g

$$g(x) = x \tag{2.1.2}$$

$$\begin{aligned} (2.1.2) &\iff 1 + 2x = x \\ (2.1.2) &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Alors g admet un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2.1.3 *Soit h une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:*

$$h(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x$$

On cherche les points fixes de h

$$h(x) = x \tag{2.1.3}$$

$$\begin{aligned} (2.1.3) &\iff x + \frac{\pi}{2} - \arctan x = x \\ (2.1.3) &\iff \frac{\pi}{2} - \arctan x = 0 \\ (2.1.3) &\iff \arctan x = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ce qui est impossible car la fonction $\tan$ *n'est pas définit à $\frac{\pi}{2}$. Alors h n'a pas de point fixe dans $\mathbb{R}$.*

2.2 Théorème du point fixe de Banach dans un espace métrique complet

Théorème 2.2.1 [8] *Soit (E, d) espace métrique complet, toute contraction d'un espace métrique complet E non vide dans lui-même admet un point fixe et un seul .*

Démonstration.

a) L'existence:

On va utiliser la méthode dite des *approximations successive.*

Soit x_0 un point quelconque de E, posons:

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f^{\ 2}(x_0), ..., x_n = f(x_{n-1}) = f^{\ n}(x_0), ...$$

Nons formons ainsi une suite infinie $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ d'éléments de E. Nons allons montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme f est une contraction, on a la suite des inégalités :

$$\begin{aligned}
d(x_2, x_1) &= d(f(x_1), f(x_0)) \\
&\leq kd(x_1, x_0) \\
d(x_3, x_2) &= d(f(x_2), f(x_1)) \\
&\leq kd(x_2, x_1) \\
&\leq k^2 d(x_1, x_0) \\
&\dots \\
&\dots \\
&\dots \\
(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\
&\leq kd(x_n, x_{n-1}) \\
&\leq k^n d(x_1, x_0) \\
d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + ... + (x_{n+1}, x_n) \\
&\leq (k^{p-1} + k^{p-2} + ... + k + 1)k^n d(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

$(k^p + k^{p-1} + ... + k + 1)$ somme de $(p+1)$ terme d'une suite géometrique.

Alors

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

On en déduit bien que $d(x_{n+p}, x_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la suite des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy par suite, elle admet une limite a, alors x_n tend vers a on voit que $x_{n+1} = f(x_n)$ tend vers $f(a)$ d'aprés la contituité de f, et comme x_{n+1} tend aussi vers a, on a bien $a = f(a)$, et a est un point fixe.

b) L'unicité:

L'unicité du point fixe est évidente, même si E n'est pas complet.

Si a et b sont deux points fixes, on doit avoir

$$\begin{aligned} f(a) &= a,\ f(b) = b \\ d(a,b) &= d(f(a), f(b)) \end{aligned}$$

f contraction

$$d(a,b) \leq kd(a,b) < d(a,b) \qquad si \quad d(a,b) \neq 0.$$

On a donc nécessairement $d(a,b) = 0$, a et b sont confondus $(a = b)$. ■

2.3 La version dans un espace de Banach

Théorème 2.3.1 [6] *Si f est une application contractante d'un espace de Banach E dans lui-même, alors f possède un point fixe unique $a \in E$, qui est par défnition la solution unique de l'équation*

$$f(x) = x$$

de plus la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dite des approximations successives, définit par:

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné dans } E \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers a.

Démonstration. On va suivre la même démarche que la démonstration précédente:

a) Existence d'une solution:

La suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En effet posons p entier positif:

$$\begin{aligned} \|x_{n+p} - x_n\| &= \|f(x_{n+p-1}) - f(x_{n-1})\| \\ &\leq k\|x_{n+p-1} - x_{n-1}\| \end{aligned}$$

Par récurrence on obtient:

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq k^n \|x_p - x_0\|$$

D'autre part

$$\|x_p - x_0\| \leq \|x_p - x_{p-1}\| + \|x_p - x_{p-2}\| + ... + \|x_1 - x_0\|$$

Soit

$$\|x_p - x_0\| \leq (k^p + k^{p-1} + ... + k + 1) \|x_1 - x_0\|$$

$(k^p + k^{p-1} + ... + k + 1)$ somme de $(p+1)$ terme d'une suite géometrique, alors

$$\|x_p - x_0\| \leq \frac{1 - k^{p+1}}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

On utilise l'hypothèse de contraction $k < 1$ et on obtient:

$$\|x_p - x_0\| \leq \frac{1}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

d'où

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1 - k} \|x_1 - x_0\|$$

Donc la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui converge vers une limite a dans l'espace complet E. Cette limite vérifie

$$f(a) = a$$

b) Unicité de la solution:

Supposons l'existence de deux solutions a_1 et a_2, l'hypothèse de contraction entraîne:

$$\begin{aligned} \|a_1 - a_2\| &= \|f(a_1) - f(a_2)\| \\ &\leq k \|a_1 - a_2\| \\ &< \|a_1 - a_2\|, \text{ car } k < 1 \end{aligned}$$

donc contradiction et $a_1 = a$. ■

2.4 Remarques

Remarque 2.4.1 *Le procédé précédent donne non seulement l'existence du point fixe, mais une méthode pratique pour le trouver. En outre la suite des* $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *est rapidement convergente. On a en effet:*

$$\|x_n, a\| = \lim_{p \to +\infty} \|x_n, x_{n+p}\| \leq \frac{k^n}{1 - k^n} \|x_1, x_0\|.$$

Remarque 2.4.2 *Si f est une application Lipschitiziene (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées f^P est une contraction, alors f a encore un point fixe et un seul. Ceci résulte de l'unicité.*

Corollaire 2.4.1 [8] *Une application d'un espace métrique complet dans lui-même dont une itérée est contractante possède un point fixe unique.*

Preuve. Soit (E, d) un espace métrique complet, et $f : E \to E$ une application. On suppose qu'une itérée de f est contractante, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geq 1$telque

$$f^P = \underbrace{f \circ f \circ f \circ ... \circ f}_{p \ \ fois}$$

(p facteurs) soit Lipschitzienne de rapport $k < 1$. D'après l'hypothése précédent, f^P possède un point fixe unique x. On a

$$f^{\,P}\ (f(x)) = f^{\,P+1}\ (x) = f(f^{\,P}\ (x)) = f(x)$$

donc $f(x)$ est un point fixe de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Mais comme x est l'unique point fixe de f^P , on a $f(x) = x$, ce qui exprime que x est un point fixe de$f$.
Supposons que y soit un autre point fixe de f. On voit immédiatement que y est aussi un point fixe de f. Donc en raison de l'unicité du point fixe de f^P , $x = y$.

■

Corollaire 2.4.2 [13] *Soit (E, d) un espace métrique complet et soit*

$$B(x_0, r) = \{x \in E, \quad d\,(x_0, x) < r\}$$

ou $x_0 \in E$ et $r > 0$:
Supposons que $f : B(x_0, r) \to E$ est une contraction avec:

$$d\,(f\,(x_0)\,, x_0) \leq (1 - k)\, r.$$

alors f admet un seul point fixe dans $B(x_0, r)$

Preuve. Il existe r_0 avec $0 \leq r_0 \leq r$ tel que $d\,(f\,(x_0)\,, x_0) \leq (1 - k)\, r_0$.

Nous montrerons que $f:\overline{B(x_0,r_0)}\to\overline{B(x_0,r_0)}$. En effet si $x\in\overline{B(x_0,r_0)}$, alors

$$\begin{aligned} d\left(f\left(x\right),x_0\right) &\leq d\left(f\left(x\right),f\left(x_0\right)\right)+d\left(f\left(x_0\right),x_0\right)\\ &\leq kd(x,x_0)+\left(1-k\right)r_0\\ &\leq r_0\end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer le théorème du point fixe dans l'espace métrique pour déduire que f a un seul point dans $\overline{B(x_0,r_0)}\subset B(x_0,r)$. Encore, on peut montrer que f a un seul point dans $B(x_0,r)$ ■

Remarque 2.4.3 *On peut remplacer la condition de contraction de f par la condition suivante:*

$$\sup\left|f^{\,\prime}\left(x\right)\right|\leq k,\quad k<1$$

On a:

Corollaire 2.4.3 [14] *Soit $f:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a,b[$. Alors f une contraction si seulement si:*

$$\sup_{a<x<b}\left|f^{\,\prime}\left(x\right)\right|\leq 1$$

Preuve. Supposons que $\sup\limits_{a<x<b}\left|f^{\,\prime}\left(x\right)\right|=k\leq 1$, soient $x,y\in\,]a,b[$. D'après le théorème des accroissements finis: $f(x)-f(y)=(x-y)\;f^{\,\prime}\left(\xi\right)$ avec $\xi\in\,]y,x[$, d'ou:

$$\begin{aligned}\left|f(x)-f(y)\right| &= \left|x-y\right|\left|f^{\,\prime}\left(\xi\right)\right|\\ &\leq k\left|x-y\right|\end{aligned}$$

D'où f est contractante

Réciproque: f est contractante

$$\forall x\in\,]a,b[\,,\ \forall\eta\ \text{ tel que } x+\eta\in\,]a,b[\,:\left|f(x+\eta)-f(x)\right|\leq k\left|\eta\right|$$

et pour $\eta\neq 0$

$$\left|\frac{f(x+\eta)-f(x)}{\eta}\right|<k\implies\lim_{\eta\to 0}\left|\frac{f(x+\eta)-f(x)}{\eta}\right|=\left|f^{\,\prime}\left(x\right)\right|\leq k$$

d'où l'équivalence. ■

2.5 La signification du théorème du point fixe de Banach

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linéaire

Citons quelques un

- Existance de la solution.
- Unicité de la solution.
- Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation.
- Existance de la convergence des méthodes d'approximation.
- Stabilité des méthodes d'approximation.

Et pour achever ce paragraphe, nous allons montrer que les hypothèses du théorème du point fixe de Banach sont essentielles:
Si nous en négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

1) E n'est pas stable par f:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ sur } E = [0,1]$$

or E est fermé dans $\mathbb{R}$, et complet car $\mathbb{R}$ est complet. De plus:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow (\sup_{x\in E}\left|f^{\ '}(x)\right| < 1) \Rightarrow (f \text{ est contractante})$$

mais f n'a pas du point fixe car:

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right], \text{ i.e. } E \text{ n'est pas stable par } f$$

2) considérons l'espace suivant : $E = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ muni de la métrique

$$d(x,y) = |x-y|, \quad \forall x, y \in E$$

soit $f : E \to E$ tel que :$f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors:

$$\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) &= |f(x) - f(y)| \\
&= \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| \\
&= \left|x - y - \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right| \\
&= \left|x - y - \frac{x-y}{xy}\right| \\
&= \left|x - y(1 - \frac{1}{xy})\right| \\
&= |x - y| \frac{xy-1}{xy} \\
&< |x - y| \\
&= d(x, y)
\end{aligned}$$

donc

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in E$$

c'est-à-dire:

$$\nexists k < 1 \text{ tel que : } d(f(x), f(y)) < kd(x, y) \qquad \forall x, y \in E$$

on vérifie que f ne possède aucun point fixe dans E

En effet: $f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ impossible.

3) E n'est pas complet

$$f_x = \frac{\sin x}{2} \text{ sur } E = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{or } f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \text{ et } \sup_{x\in E} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$$

Donc f est contractante mais E n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc il n'est pas complet.

2.6 Extension du principe d'application contractante

Le principe du point fixe a connu de diverses extensions. Dans ce qui suit nous allons aborder quelques extension

2.6.1 Extension de Boyd et Wong

Elle consiste à remplacer la contraction par la $\varphi - contraction$ dont nous donnons la définition:

Définition 2.6.1 *soit E un espace métrique et f une application de E dans E. On dit que f est une $\varphi -$ contraction, s'il existe une application φ semi-continue supérieurement de $[0,\infty[$ dans $[0,\infty[$avec $\varphi(r) < r$ pour $r > 0$ telle que:*

$$\forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) < \varphi(d(x, y))$$

Le résultat suivant va assurer l'existance d'un unique point fixe pour une telle application.

Théorème 2.6.1 [14] *Toute $\varphi -$contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.*

Remarque 2.6.1 *La contraction est un cas particulier de la $\varphi -$contraction (il suffit de prendre $\varphi(r) = kr$ pour tout $r \geq 0$, $0 \leq k < 1$).*

2.6.2 Extension d'Edeltein

Théorème 2.6.2 [14] *Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to F$ une application telle que*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),\ \forall x, y \in E,\ x \neq y \tag{2.6.1}$$

Supposons qu'il existe $y \in E$, tel que les itérations de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ données par

$$\begin{cases} x_n = y \\ x_n = f(x_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

possèdent une sous suite $\{x_{n_j}\}$ avec $\lim\limits_{j\to+\infty} x_{n_j} = x \in E$.
Alors x est point fixe de f et il est unique.

Remarque 2.6.2 *1) L'application $f : E \to F$ avec la propriété* (2.6.1) *ne donne pas le même résultat que le théorème (2.6.1) mais si E est complet alors f avec la propriété* (2.6.1) *est une $\varphi -$ contraction.*
2) Le résultat précédent (d'Edeltein) a une importante conséquence qui est:

Théorème 2.6.3 [14] *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* $f : E \to F$ *telle que:*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \ \forall x, y \in E, \ x \neq y$$

En plus, supposons que $f : E \to K$ *ou* K *est un sous-ensemble compact de* E *alors* f *possède un unique point fixe dans* E.

Chapitre 3

Application du théorème du point fixe de Banach

Dans ce chapitre, nous présentons quelques applications du théorème du point fixe de Banach.

Ces applications incluent les théorèmes d'existence de solution pour les équations différentielles ou les équations intégrales et l'étude de la convergence de certaines méthodes numériques comme la résolution des systèmes linéaires.

3.1 Application aux équations intégrales

3.1.1 Equations de Fredholm

On considère un réel λ, une fonction numérique réelle g continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, et une fonction réelle K de 2 variables réelles continue sur le pavé fermé $[a,b]\times[a,b]$. Le problème intégral de Fredholm s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver la fonction } f \text{ définie sur } [a,b] \text{ telleque:} \\ f(x)=\lambda\displaystyle\int_a^b k(x,y)f(y)dy+g(x) \quad \forall x\in[a,b] \end{cases} \tag{3.1.1}$$

On se place dans l'espace $C([a,b])$ des fonctions continues muni de la norme du max

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

On pose (K est continue sur $[a,b]\times[a,b]$):

$$M=\sup_{(x,y)\in[a,b]\times[a,b]}|k(x,y)|$$

et on obtient aisément par application du théorème du point fixe le résultat suivant:

Théorème 3.1.1 [6] *L'équation de Fredholm admet une solution unique dans $C[a,b]$ à la condition suffisante que:*

$$|\lambda|\,M(b-a)<1$$

Démonstration.

1) $(C([a,b]),||.||_{\infty})$ est un espace de Banach.

2) L'application T définie par

$$\begin{cases} f\rightarrow Tf \quad \text{ou:} \\ Tf(x)=\lambda\displaystyle\int_a^b k(x,y)f(y)dy+g(x) \quad \forall x\in[a,b]\end{cases}$$

est une application de $C([a,b])$ dans lui même. En effet:

$$Tf(x_0+h)-Tf(x_0)=\lambda\int_a^b (k(x_0+h,y)-k(x_0,y))f(y)dy+g(x_0+h)-g(x_0)$$

où

$$|Tf(x_0+h)-Tf(x_0)|=|\lambda|\int_a^b |(k(x_0+h,y)-k(x_0,y))|\,|f(y)|\,dy+|g(x_0+h)-g(x_0)|$$

et le résultat en utilisant la continuité de K et celle de g.

3) L'application T est une contraction:

$$Tf_1(x)-Tf_2(x)=\lambda\int_a^b k(x,y)(f_1(y)-f_2(y))dy$$

donc comme K est bornée par M dans $[a,b]\times[a,b]$

$$|Tf_1(x)-Tf_2(x)|\leq|\lambda|\,M(b-a)\,\|f_1-f_2\|\,, \qquad \forall x\in[a,b]$$

On obtient:

$$\|Tf_1(x)-Tf_2(x)\|\leq|\lambda|\,M(b-a)\,\|f_1-f_2\|$$

Avec

$$k=|\lambda|\,M(b-a)<1$$

■

Remarque 3.1.1 *On pourrait remplacer la condition ci-dessus par la condition suivante:*

$$\sup |\lambda| \int_a^b |k(x,y)|\, dy \leq k < 1$$

3.2 Application aux équations différentielles

3.2.1 Théorèmes d'existence et d'uncité du Cauchy-Lipschitz

Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x,y) \tag{3.2.1}$$

Définition 3.2.1 ***(Fonction de Lipschitz)*** *On dit que la fonction f vérifie la condition de Lipschitz par rapport à y sur l'intervalle U si*

$$\forall (x,y_1),(x,y_2) \in U \qquad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k\,|y_1 - y_2|$$

k : *est appelé le constant de Lipschitz.*

Proposition 3.2.1 [11] *Si la dérivée ${f_y}'$ (dérivée par rapport à y) existe et verifie:*

$$\left|{f_y}'(x,y)\right| \leq M, \ \ M \text{ réel positif.}$$

Alors f est satisfait la condition de Lipschitz.

Preuve. On a

$$\forall x,y \quad |f\,'(x,y)| \leq M$$

En appliquant le théorème des accroisements finis pour les deux point (x,y_1) on trouve

$$\begin{aligned} f(x,y_1) - f(x,y_2) &= {f_y}'(x,\xi)(y_1 - y_2) \quad y_1 \leq \xi \leq y_2 \\ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= \left|{f_y}'(x,\xi)\right| |y_1 - y_2| \\ &\leq M\,|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Donc f verifie la condition de Lipshitz avec $k = M$. ■

Proposition 3.2.2 [11] *Soit l'équation différentielle* (3.2.1) *avec la condition initiale* $y(x_0) = y_0$ *dite le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } f \text{ est une fonction continue} \tag{3.2.2}$$

le problème (3.2.2) *est équivalent à l'équation intégrale*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{3.2.3}$$

Preuve.

($\Longrightarrow$) Supposons maintenant que y est une solution du problème de Cauchy (3.2.2). On a alors $y'(x) = f(x, y(x))$ et $y(x_0) = y_0$. On peut intégrer y' par rapport à t car $y'(t) = f(t, y(t))$ et $t \to f(t, y(t))$ est continue sur un segment et donc intégrable sur le même segment. Alors on obtient

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = [y(t)]_{x_0}^{x} = y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$$

donc, on a bien

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

($\Longleftarrow$) Par dérivation de l'équation intégrale on obtient

$$y'(x) = \left[\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right]_x' = f(x, y(x))$$

L'équation intégrale satisfait aussi la condition initiale

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = y_0 \text{ car: } \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = 0.$$

■

Lemme 3.2.1 [11] *Toute solution du problème de Cauchy* (3.2.2) *est une solution de l'équation intégrale* (3.2.3).

Théorème 3.2.1 [11] *Soit* U *un domaine défini comme suit*

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ telle que } |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\right\}$$

où (x_0, y_0) *est un point fixe de* $\mathbb{R}^2$, *si la fonction* $f(x, y)$ *est continue et vérifie la condition de Lipschitz par rapport à* y *on a:*

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq k\,|y - y_0|$$

k*: appelé le constant de Lipschitz. Alors l'équation différentielle admet une seule solution* $y = \varphi(x)$ *sur l'intervalle* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *ou* $h = \min\{|x_0 - a|, |y_0 - b|\}$ *vérifiant la condition initiale* $y(x_0) = y_0$.

Corollaire 3.2.1 [11] *On utilise la méthode des approximations successives. On a*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{3.2.4}$$

On cherche a trouver la solution approchée de l'équation (3.2.4) *. Nous prenons l'approximation de degré* 0 *de la fonction* $y, \varphi_0(x) = y_0$ *si* $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ *. Cela signifie que* $y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt$ *est bien définie en fonction de* x. *On définie,* φ_1 *par*

$$\varphi_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))dt$$

telle que $\varphi_1(x)$ *est continue sur l'intervalle* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *et vérifie* $\varphi_1(x_0) = y_0$. *Définissons par récurrence*

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt \tag{3.2.5}$$

Corollaire 3.2.2 [11] *Cette dernière relation représente une suite des fonctions* $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *continues sur l'intervalle* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *vérifiant la condition initial* $\varphi_n(x) = y_0$.

Alors il faut montrer que:

1) La suite $\varphi_n(x)$ *converge uniformément vers la solution exacte.*

2) La limite de la suite, $\varphi_n(x)$ *est une solution de l'équation intégrale* (3.2.3).

3) La solution est unique (la limite de la suite $\varphi_n(x)$ *unique).*

Preuve.

1) Pour montrer la convergence uniforme, on construie la suite

$$S_n = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + ... + (\varphi_n - \varphi_{n-1})$$

On a:

$$\begin{aligned}
S_n &= \varphi_0 + \sum_{i=1,\dots,n} (\varphi_i - \varphi_{i-1}) \\
S_n &= \varphi_n(x), \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]
\end{aligned}$$

Cela signifie que la série et la suite convergent vers la même limite.

Comme

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &= |y_1(x) - y_0| \\
&= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t)) dt - y_0 \right| \\
&\leq M \int_{x_0}^{x} dt \\
&\leq M |x - x_0|
\end{aligned}$$

Alors, en appliquant la condition de Lipschitz, on a:

$$\begin{aligned}
|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| &= \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_1(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t)) dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} \left[f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_0(t)) \right] dt \right| \\
&\leq k \int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \, dt \\
&\leq kM \int_{x_0}^{x} |t - t_0| \, dt \\
&\leq \frac{1}{2} kM |x - x_0|^2 \\
&\leq kM \frac{|x - x_0|^2}{2!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| &= \left|y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_2(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi_1(t))dt\right| \\
&= \left|\int_{x_0}^{x} \left[f(t,\varphi_2(t)) - f(t,\varphi_1(t))\right] dt\right| \\
&\leq k\int_{x_0}^{x} |\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|\, dt \\
&\leq k\int_{x_0}^{x} kM\frac{|t-t_0|^2}{2!}dt \\
&\leq \frac{k^2M}{2!}\int_{x_0}^{x} |t-t_0|^2\, dt \\
&\leq \frac{k^2M}{2!}\left[\frac{|t-t_0|^3}{3}\right]_{x_0}^{x} \\
&\leq k^2M\frac{|x-x_0|^3}{3!}
\end{aligned}$$

comme $|x-x_0|<h$, d'où $|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)| \leq \frac{1}{2!}kMh^2$ et $|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)| \leq \frac{1}{3!}k^2Mh^3$, par réccurence on obtient:

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right| \leq \frac{Mk^{n-1}h^n}{n!}$$

Alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \varphi_0+(\varphi_1-\varphi_0)+(\varphi_2-\varphi_1)+(\varphi_3-\varphi_2)+...+(\varphi_n-\varphi_{n-1}) \\
&\leq \varphi_0+Mh+\frac{1}{2!}kMh^2+\frac{1}{3!}k^2Mh^3+...+\frac{1}{n!}k^{n-1}Mh^n \\
&\leq y_0+\frac{M}{k}(kh)+\frac{M}{k}\frac{(kh)^2}{2!}+\frac{M}{k}\frac{(kh)^3}{3!}+...+\frac{M}{k}\frac{(kh)^n}{n!} \\
&\leq y_0+\frac{M}{k}\left[(kh)+\frac{(kh)^2}{2!}+\frac{(kh)^3}{3!}+...+\frac{(kh)^n}{n!}+1-1\right]
\end{aligned}$$

Converge vers $y_0+\frac{M}{k}\left[\exp(kh)-1\right]$ quand n tend vers $+\infty$.

Donc la série est uniformément convergente, alors la suite $\varphi_n(x)$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[x_0-h, x_0+h]$. Comme $\varphi_n(x)$ est une suite des fonctions continues. Donc, la limite est une fonction continue sur l'intervalle $[x_0-h, x_0+h]$.

2) Montrons que $\varphi_n(x)$ est la solution de l'équation intégrale (3.2.3). Comme la fonction $f(x,y)$ est continue sur U. Alors, $f(x,\varphi_n(x))$ converge vers $f(x,\varphi(x))$ quand n tend vers

$+\infty$. Par passage à la limite pour les deux nombres de l'équation (3.2.5). On trouve:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt \tag{3.2.6}$$

Alors $\varphi(x)$ est une solution de l'équation intégrale (3.2.6), donc une solution du problème de Cauchy(3.2.2).

Comme $|\varphi_n(x) - y_0| < b,\ \forall n = 0, 1, 2, ...$ Alors $|\varphi(x) - y_0| < b$. Donc, la fonction $\varphi(x)$ est solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, reste dans le domaine U et réalise la condition suivante

$$y(x_0) = y_0, \quad (y = \varphi(x, x_0, y_0))$$

3) L'unicité de la limite

Soit $\varphi^*(x)$ une autre solution de l'équation intégrale (3.2.3) , $y = \varphi^*(x, x_0, y_0)$ sur l'intervalle $[x_0 - h^*, x_0 + h^*]$ telle que $h^* < h,\ \varphi^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi^*(t))dt$. On a:

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - \varphi^*(x)| &\leq \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt \ - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi^*(t))dt \right| \quad \text{pour tout } n = 1, 2, ..., n \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, \varphi_{n-1}(t)) - f(t, \varphi^*(t)) \right| dt \\
&\leq k \int_{x_0}^{x} \left| \varphi_{n-1}(t) - \varphi^*(t) \right| dt
\end{aligned}$$

Pour $n = 1$:

$$\begin{aligned}
|\varphi_0(x) - \varphi^*(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi^*(t))dt \\
&\leq M\,|x - x_0|
\end{aligned}$$

Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x) - \varphi^*(x)| &\leq k \int_{x_0}^{x} |\varphi_0(t) - \varphi^*(t)|\, dt \\
&\leq kM \frac{|x - x_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

Par récurrence, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x) - \varphi^*(x)| &\leq k^{n-1} M \frac{|x - x_0|^n}{n!} \\
&\leq \frac{M}{k} \frac{(k\,|x - x_0|)^n}{n!}
\end{aligned}$$

converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ quelque soit $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.

Enfin, $|\varphi_n(x) - \varphi^*(x)|$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\varphi(x) - \varphi^*(x) = 0$, alors $\varphi(x) = \varphi^*(x)$. ■

Exemple 3.2.1 *Soit le problème de Cauchy suivant:*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) = 2x(1+y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Ce problème est équivalent à l'équation intégrale

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \ \textit{avec} \ \ (x_0, y_0) = (0,0)$$

Soit la suite de récurrence définie par:

$$\varphi_0 = y_0 = 0, \quad \varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \ \varphi_{n-1}(t))dt$$

Donc pour $n = 1$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \ \varphi_0(t))dt \\ &= \int_0^x f(t,0)dt \\ &= \int_0^x 2tdt \\ &= \left[t^2\right]_0^x \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \ \varphi_1(t))dt \\ &= \int_0^x f(t,t^2)dt \\ &= \int_0^x 2t(1+t^2)dt \\ &= \left[t^2 + \frac{t^4}{2}\right]_0^x \\ &= x^2 + \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

Pour $n = 3$

$$\begin{aligned}
\varphi_3(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi_2(t))dt \\
&= \int_0^x f(t, t^2 + \frac{t^4}{2})dt \\
&= \int_0^x 2t(t^2 + \frac{t^4}{2})dt \\
&= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6}\right]_0^x \\
&= \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}
\end{aligned}$$

...

...

...

$$\varphi_n(x) = \int_{x_0}^{x} f(t,\ \varphi_{n-1}(t))dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(x^2\right)^k}{k!}$$

On étudie la convergence. On a:

$$f(x,y) = 2x(1+y)$$

Soit $(x, y_1), (x, y_2) \in D(f)$

$$\begin{aligned}
|f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |2x(1+y_1) - 2x(1+y_2)| \\
&= |2x(y_1 - y_2)| \\
&\leq |2x|\,|y_1 - y_2| \\
&\leq k\,|y_1 - y_2|
\end{aligned}$$

Choisissons un domaine borné de $\mathbb{R}^2$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \quad |x| < a, \quad |y| < b \ / \ a, b \in \mathbb{R}\right\}$$

On peut appliquer le théorème de Cauchy-Picard sur cet intervalle, alors $k = 2a$ *et la suite* (φ_n) *est convergente uniformément.*

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(x^2)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x^2)^k}{k!} - 1 \\ &= \exp\left(x^2\right) - 1\end{aligned}$$

quand n *tend vers* $+\infty$.

Solution exacte

$$y' = 2x(1+y) \implies \frac{y'}{1+y} = 2x \implies y = c\exp\left(x^2\right) - 1$$

Nous avons

$$y(0) = 0 \implies c - 1 = 0 \implies c = 1$$

Alors

$$y = \exp\left(x^2\right) - 1$$

3.3 Résolution des systèmes linéaires

[15] On se propose de résoudre le système linéaire:

$$A.x = B$$

n équations et n inconnues (A est une matrice carrée $n \times n$ donnée, B une matrice colonne donnée, X est la matrice colonne cherchée)

Posons $M = I - A$, ou I est la matrice unité, et:

$$f(x) = Mx + B.$$

La résolution de $Ax = B$ est équivalente à la recherche d'un point fixe de f, en effet:

$$f(x) = x \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}(3.3.1) &\Leftrightarrow Mx + B = x\\ (3.3.1) &\Leftrightarrow (I - A)\,x + B = x\\ (3.3.1) &\Leftrightarrow x - Ax + B = x\\ (3.3.1) &\Leftrightarrow Ax = B\end{aligned}$$

Bien entendu, le fait que f soit ou bien ne soit pas une contraction stricte va dépendre du choix de la distance qu'on mettra sur $\mathbb{R}_n$(ou $\mathbb{C}_n$):

Pour $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$et$y = (\eta_1, ..., \eta_n)$, prenons d'abord sur $\mathbb{R}^n$ la distance $d_\infty(x, y) = \max|\xi_i - \eta_i|$. Notons: $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$.

On a:

$$\begin{aligned}
d_\infty\left|f(x), f(y)\right| &= d_\infty(Mx + B, My + B)\\
&= \max_{1\leq i\leq n}|M.(x-y)_i|\\
&= \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\left(\xi_j - \eta_j\right)\right|\\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\,.\left|\xi_j - \eta_j\right|\right)\\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right).\max_{1\leq j\leq n}\left|\xi_j - \eta_j\right|\\
&= \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right).d_\infty(x, y)
\end{aligned}$$

Et donc f sera une contraction stricte lorsque $M = I - A$ vérifie :

$$||M||_{1,\infty} = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right) < 1$$

On vérifier que si l'on prend sur $\mathbb{R}^n$ la distance $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \eta_i|$, on tombe sur la condition sufisant:

$$||M||_{1,\infty} = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) < 1$$

et en fin que si l'on prend $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i - \eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On tombe sur la condition:

$$||M||_{2,2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2 < 1.$$

3.3.1 Méthodes itératives pour la résolution des systèmes linéaires

On va voir un type de méthodes itératives de résolution du systéme linéaire: $Ax = b$ sous la forme:

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ vecteur arbitraire} \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \ k \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Lorsque

$$Ax = b \iff x = Bx + c$$

La matrice B et le vecteur c sont en fonction de A et b.

Définition 3.3.1 *La méthode itérative* (3.3.2) *est convergente si*

$$\lim_{k \to +\infty} x^{(k)} = x, \ \forall x^{(0)}$$

Remarque 3.3.1 [12] *Si on pose* $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ *pour* $k \in \mathbb{N}$, *comme* $x = bx + c$ *et* $x^{(k+1)} = bx^{(k)} + c$, *on a*

$$\begin{aligned} e^{(k)} &= Bx^{(k-1)} - Bx = Be^{(k-1)} = ... = B^k e^{(0)} \\ \lim_{k \to +\infty} x^{(k)} &= x \iff \lim_{k \to +\infty} e^{(k)} = 0 \iff \lim_{k \to +\infty} B^k e^{(0)} = 0 \end{aligned}$$

Donc La méthode itérative (3.3.2) *est convergente si*

$$\lim_{k \to +\infty} B^k v = 0, \ \forall v$$

Ce qui équivaut à

$$\lim_{k \to +\infty} \left\| B^k v \right\| = 0, \ \forall v$$

Pour toute norme vectorielle $\|.\|$.

Convergence des méthodes itératives

Théorème 3.3.1 [12] *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1) La méthode itérative (3.3.2) *est convergente.*

2) $\rho(B) < 1$, *(*$\rho(B)$ *: le rayon spéctral d'une matrice* B *).*

3) $\|B\| = 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonné* $\|.\|$.

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Supposons $\rho(B) \geq 1$, $\rho(B) = |\lambda|$ donc existe un vecteur $p : p \neq 0$,

$$Bp = \lambda p et\, |\lambda| \geq 1 \implies \forall k \geq 0,\ \left\|B^k p\right\| = \left\|\lambda^k p\right\| = \left|\lambda^k\right| . \|p\| = |\lambda|^k . \|p\| \geq \|p\|$$

Ce qui contredit $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k p = 0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Il existe au moins ume norme matricielle subordonné telle que:

$$\|B\| \leq \rho(B) + \varepsilon$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soit $\|.\|$ une norme matricielle subordonné. On utilise alors la propriété:

$$\begin{aligned} \forall k &\geq 0,\ \forall v,\ \left\|B^k v\right\| \leq \left\|B^k\right\| . \|v\| \leq \|B\|^k . \|v\| \\ \|B\| &< 1 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \left\|B^k\right\| = 0 \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \left\|B^k v\right\| = 0 \end{aligned}$$

■

Méthodes itératives

[12] Ces méthodes sont des cas particuliers de la méthode:

$A = M - N$ avec M inversible et assez simple. On aurait alors:

$$Ax = b \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned} (3.3.3) &\iff (M - N)x = b \\ (3.3.3) &\iff Mx = Nx + b \\ (3.3.3) &\iff x = M^{-1}Nx + M^{-1}b \\ (3.3.3) &\iff x = Bx + c \end{aligned}$$

Avec $B = M^{-1}N$ et $c = M^{-1}b$.

Méthode de Jacobi

[12] En posant $A = D - (E + F)$, $M = D$ est la diagonale de A et $N = E + F$.

$$Ax = b \iff Dx = (E + F)x + b$$

On suppose que D est inversible, c'est dire $a_{ii} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n$
la matrice

$$J = D^{-1}(E + F) = I_n + D^{-1}A \tag{3.3.4}$$

est appelée la matrice de Jacobi.

$$\begin{cases} x^{(0)} \ \text{ donné,} \\ Dx^{(k+1)} = (E + F)x^{(k)} + b, \quad k \geq 0 \end{cases} \tag{3.3.5}$$

A chaque étape, on calcule les n composantes

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(k+1)} = a_{12}x_2^{(k)} - ... - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ a_{22}x_2^{(k+1)} = a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - ... - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{(k)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Exemple 3.3.1 *On utilise la méthode de Jacobi pour résoudre le système suivante:*

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 31 \\ 26 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad \textit{et } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient: $x^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.950 \\ 3.074 \\ 2.019 \\ 1.036 \end{pmatrix},\ x^{(10)} = \begin{pmatrix} 3.9956 \\ 3.0035 \\ 1.9985 \\ 1.0003 \end{pmatrix},\ x^{(15)} = \begin{pmatrix} 3.99973 \\ 3.00026 \\ 1.99992 \\ 1.00005 \end{pmatrix}$

La solution approche coneverge vers la solution exacte $x = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

3.4 Approche numérique du théorème du point fixe

Dans ce qui suit, on étudie une application du théorème du point fixe en faisant appel à une méthode itérative convergente .

Soit $f : E \to H^n, n \in \mathbb{N} \quad H$ compact

$$x\,(x_1, x_2, ..., x_n) \in E \to f\,(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

On impose les conditions suivantes sur E et f :

E est ensemble fermé de H^n.

f est une application contractante sur E:

$$\exists 0 \leq K \leq 1 \text{ tel que } \forall x, y \in E, ||f(x) - f(y)|| \leq K\,||x - y||$$

$||.||$ est une norme quelconque dans H^n S est stable par $f : f(E) \subset f(E)$

Théorème 3.4.1 [14] *Soit E est une partie fermé de H^n,est f une application définie sur E et à valeur dans E , constante sur E ,telle que $x \in E \to f(x) \in E$. Alors admet un unique point fixe x^*dans E.Ce point fixe est calculable comme limite de la suite des approximations successives $(x_l)_{l\geq 0}$:*

$$\begin{cases} x_0 \in E \text{ quelconque} \\ x_{l+1} = f(x_1), l \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{3.4.1}$$

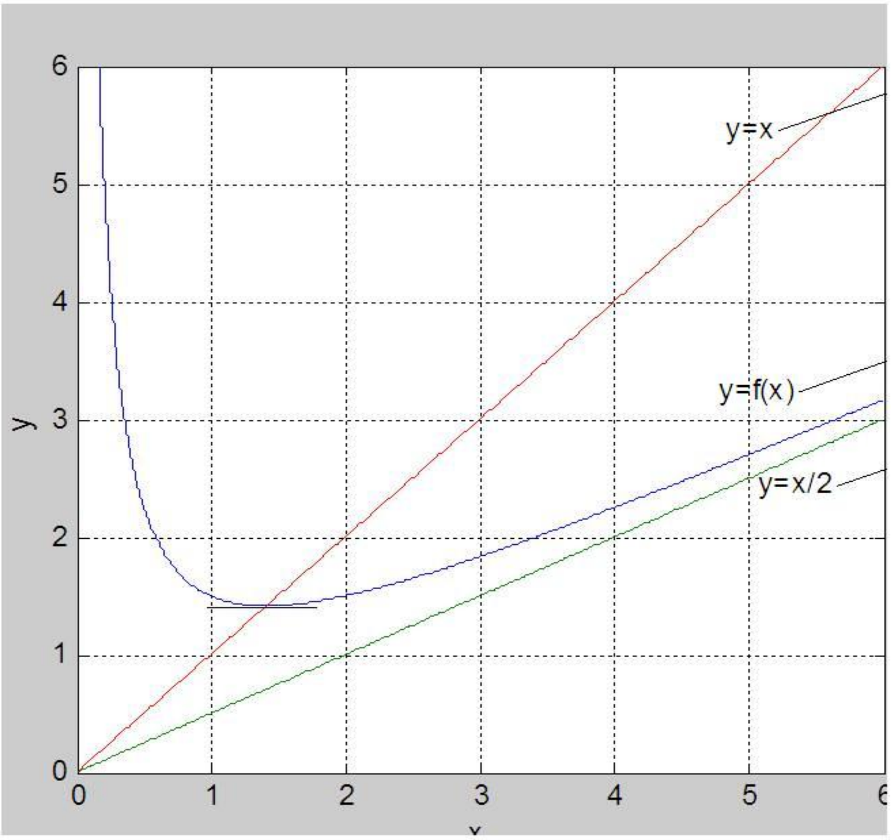
Pour tout indice $l \in \mathbb{N}^*$, on a les inégalités de majoration d'erreur suivantes:

$$\begin{cases} ||x_l - x^*|| \leq \frac{K^l}{1-K}\,||x_l - x_0|| \\ ||x_l - x^*|| \leq \frac{1}{1-K}\,||x_{l+1} - x_l|| \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Remarque 3.4.1 *Ce théorème reste vrai dans le cadre générale d'un espace vectoriel quelconque (de dimension infinie) à condition qu'il soit complet pour la norme en question. Voici un exemple où est mis en oeuvre le procédé itératif précédent.*

Exemple 3.4.1 *calcul de la racine carrée d'un nombre positif*
Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$ un nombre positif. Le théorème du point fixe précédent va nous permettre de développer une méthode de calcul de $\sqrt{c}$ et justifier sa convergence. Pour $c \in \mathbb{R}_+^*$ soit

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{c}{x})$$



Calculons f' et f''

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{c}{2x} = \frac{1}{2}\frac{x^2 - c}{x^2} \text{ et seconde: } f''(x) = \frac{c}{x^3}$$

On déduit que f' s'annule dans un seul point $\sqrt{c}$, que $f'(x)$ est négative sur $]0, \sqrt{c}[$, positif sur $[\sqrt{c}, \infty[$,avec décroissance de f sur $]0, \sqrt{c}]$ puis croissance sur $[\sqrt{c}, \infty[$ .Par ailleurs, on remarque que $\sqrt{c}$ est point fixe de f : $f(\sqrt{c}) = \frac{1}{2}(\sqrt{c} + \frac{c}{\sqrt{c}}) = \sqrt{c}$.
Sur $I = [\sqrt{c}, \infty[$ la dérivée vérifie $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, il en découle que f est contractante sur l'intervalle $[\sqrt{c}, \infty[$ de constante $\theta = \frac{1}{2}$. En effet $\forall x_1, x_2 \in I$ on a

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(x_1 - x_2)\, f'(\xi)| \text{ avec } \xi \in]x_1, x_2[$$

Selon le théorème des acroissements finit. D'où l'inégalité :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}\,|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

Exemple 3.4.2 *D'aprés le graphe de f on a l'inclusion $f(]0,+\infty[) \subset I$. On peut donc appliquer le théorème du point fixe sur l'intervalle fermé I: il existe un unique point fixe sur I pour f (c'est $\sqrt{c}$) qu'on peut déterminer par:*

$$\forall y_l \in I \ , \quad y_{l\ +1} = f(y_l) = \frac{1}{2}(y_l + \frac{c}{y_l}), \ l \geq 1$$

De plus pour $l \geq 2$ on a l'inégalité:

$$|y_l - c| \leq \frac{(0.5)^{l-1}}{1-0.5} |y_2 - y_1| = (0.5)^{l-2} |y_2 - y_1|$$

Par ailleurs, si on prend x_0 quelconque dans $]0,+\infty[$ alors les termes $y_{l\ +1} = f(y_l)$ pour $l \geq 0$ restent dans I et la suite $(x_l)_{l\geq 0}$ converge vers $\sqrt{c}$ d'après ce qui précède et l'inégalité de majoration d'erreur s'écrit alors, toujour pour $l \geq 2$,

$$|x_l - c| \leq (0.5)^{l-2} |x_2 - x_1|$$

Par exemple pour $c = 2$ on a, en partant de $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.5 \\ x_2 &= 1.4166... \\ x_3 &= 1.41421568274... \\ x_4 &= 1.414213562374... \\ x_5 &= 1.414213562373... \end{aligned}$$

On constate que la covergence vers $\sqrt{2} = 1.4142135623731...$ est trés rapide et on vérifie bien l'inégalité de majoration d'erreur donnée plus haut:

$$\left| x_5 - \sqrt{2} \right| 10^{-3} \leq 0.5^3 |x_2 - x_1| \, 0.01$$

Remarque 3.4.2 *La touche $\sqrt{}$d'une calculatrice utilise ce même procédé itératif convergeant pour déterminé la racine carrée d'un nombre positif quelque soit le point de départ dans $\mathbb{R}_+^*$.*

Conclusion

Le théorème du point fixe est un outil fondamental pour la résolution de plusieurs problèmes d'analyse que ce soit théorique ou pratique.
Le but de ce travail est l'étude du théoréme du point fixe de Banach basé sur les applications contractante dans un espace métrique et sa version dans espace vectoriel normé complet .
En basant sur la démonstration qui offre une méthode numérique pour la recherche de solution approchée.
En terminant par les application analytique sur ce théorème plus des application algébrique et numérique.

Bibliographie

[1] A. El KACIMI: cour du Analyse 5: Topologie métrique, Université de VALENCIENNES, 2009-2010.

[2] A. GREGOIRE: Analyse numérique et optimosation, Ecole Polytechnique, Paris 2005.

[3] A. KOLMOGROV-S.FOMINE: Elément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Edition MIR Moscow, 1970.

[4] F. RONGA: Cours de Analyse 2 (analyse réelle), 2001-2002.

[5] G. CHILOV: Analyse mathématique fonction d'une variable TOMO 2, Edition MIR Moskou, 1973.

[6] J-H. SAIAC: Méthode des éléments finis, 3-2005.

[7] L. MEZIANI: Topologie générale (Introduction à l'analyse mathématique), Presses de l'université de Batna, 1996.

[8] L. SCHWARTZ: Analyse (deuxiéme partie) Topologie générale et analyse fonctionnelle, Edition HERMANY, PARIS 1970.

[9] M. HAZI: Topologie (AU dela des travaux dirigés), Office des publications universitaires, 11-2009.

[10] M. HITTA AMARA: Cours Licence de Topologie des espaces Métriques, Universit e 8 Mai 1945, Guelma 2008-2009.

[11] N. DOUDI: Cours de module (Equations différentilles I) pour $2^{éme}$ année Math, Université D'Eloued 2010.

[12] P-G. CIARLET: Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Edition Masson, 1982.

[13] R. AGARWAL, M. MEEHAN & D. O'REGAN: Fixed point theory and applications, combridge university press.

[14] S. BENHAMED: Thèse magister de Point fixe et leurs applications, Université de Mohammed BOUDHIAF, M'sila 2010.

[15] Y. SONNTAG: Topologie et analyse fonctionnelle, Edition Ellipses, Marseille 7-1997 .

Résumé

Dans ce travail, nous proposons le théorème du point fixe de Banach, en référence à l'importance de leur démonstration qu'est l'approximations successives. Enfin, nous présentons différents modèles sur leurs applications en matière d'analyse mathématique, numérique et algébrique.

Mots-clés: espace métrique, suite de Cauchy, espace de Banach, application contractante, point fixe, approximation successive.

Abstract

In this work , we have proposed the Banach fixed point theorem, with reference to the importance of their demonstration which is successive approximation , finally we have consider different models of fixed point applications in mathematical analysis material, numerical and algebraic.

Key words: metric space, sequence Cauchy, Banach space, contracting application, fixed point, successive approximation.

الملخص

قمنا في هذا العمل بتقديم نظرية النقطة الصامدة لبناخ مع الاشارة الى أهمية برهانها المتمثل في التقريبات المتتالية. و في الاخير قدمنا نماذج مختلفة حول تطبيقاتها فيما يخص التحليل الرياضي، العددي و الجبري.

الكلمات المفتاحية: فضاء متري، متتالية كوشي، فضاء بناخ، التطبيق المقلص، النقطة الصامدة، التقريبات المتتالية.