UFR
MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Formes quadratiques

On se place sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de **dimension finie** n.

1. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

1.1. Formes bilinéaires symétriques

Définition 1 – Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chacune de ses variables.
Elle est dite symétrique si elle vérifie de plus : $\forall (x, y) \in E \times E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Remarque - Si φ est une forme bilinéaire sur E, alors, pour tout $x \in E$, $\varphi(0, x) = \varphi(x, 0) = 0$.

Exemple - Soient f et g deux formes linéaires sur E. L'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$ est une forme bilinéaire définie sur E.

Proposition 2 – L'ensemble des formes bilinéaires (respectivement bilinéaires symétriques) sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.2. Formes quadratiques

Définition 3 – Une forme quadratique q sur E est une application $q : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
2) L'application $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$ est bilinéaire symétrique.

Proposition 4 – L'ensemble des formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème 5 – Il existe un isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des formes quadratiques et l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques.

Démonstration : notons $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques définies sur E et $B(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques.
Soit $q \in Q(E)$. Posons $\sigma(q) = \varphi$ avec $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)]$. $\sigma(q) \in B(E)$, ainsi définie, est bien une forme bilinéaire symétrique.
Soit $\varphi \in B(E)$. Définissons $\sigma'(\varphi)$ par $\sigma'(\varphi)(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. Un calcul montre que $\sigma'(\varphi) \in Q(E)$.
Montrons que σ est inversible et que son inverse est σ'. Soit $\varphi \in B(E)$. On a $\sigma \circ \sigma'(\varphi) = \sigma(q)$ avec $q(x) = \varphi(x, x)$. Or $\sigma(q) = \varphi'$ avec

$$\begin{aligned}
\varphi'(x, y) &= \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)] \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x, x) - \varphi(y, y)] \\
&= \varphi(x, y)
\end{aligned}$$

par bilinéarité de φ. On a donc $\sigma \circ \sigma' = Id_{B(E)}$. On montre de même que $\sigma' \circ \sigma = Id_{Q(E)}$. L'application σ est donc bijective et $\sigma^{-1} = \sigma'$. Elle est linéaire par construction, d'où le résultat. □

Définition 6 – Soit q une forme quadratique. L'unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\varphi(x,x)=q(x)$ pour tout $x\in E$ s'appelle la forme bilinéaire symétrique associée à q.

1.3. Écriture matricielle

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.
Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_i)_{1\le i\le n}$ et $(y_j)_{1\le j\le n}$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.
Soit φ une forme bilinéaire symétrique définie sur E. On a alors par bilinéarité de φ :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)\\&=\sum_{1\le i,j\le n} x_iy_j\,\varphi(e_i,e_j)\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une famille de réels telle que $a_{ij}=a_{ji}$ pour $1\le i,j\le n$; alors l'application $(x,y)\mapsto \sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}\,x_iy_j$ est bilinéaire symétrique.

Définition 7 – Soit φ une forme bilinéaire symétrique définie sur E et soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. La matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$ s'appelle la matrice de φ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.
Si X et Y désignent respectivement les matrices-colonnes des coordonnées de x et de y dans la base $(e_1,\dots,e_n)$, alors on a

$$\boxed{\varphi(x,y)={}^tXMY={}^tYMX}$$

Proposition 8 – Soit φ une forme bilinéaire symétrique définie sur E. Si M est la matrice de φ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$, alors la matrice M' de φ dans la base $(e'_1,\dots,e'_n)$ est $M'={}^tPAP$, où P est la matrice de passage de la base $(e_1,\dots,e_n)$ à la base $(e'_1,\dots,e'_n)$.

Démonstration : soient x et y des vecteurs de E. Notons X et Y (respectivement X' et Y') les matrices-colonnes de leurs coordonnées respectives dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ (respectivement $(e'_1,\dots,e'_n)$). On a $X=PX'$ et $Y=PY'$. On en déduit que

$$\varphi(x,y)={}^tXMY={}^t(PX')M(PY')={}^tX'({}^tPMP)Y'.$$

D'où $M'={}^tPMP$. □

Définition 9 – Soit q une forme quadratique. La matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à q dans une base $\mathscr{B}$ s'appelle la matrice de q dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 10 – Deux matrices M et M' de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites congruentes s'il existe une matrice $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $M'={}^tPMP$.
Deux matrices sont donc congruentes si elles représentent la même forme bilinéaire dans deux bases différentes de E.

Proposition 11 – La congruence est une relation d'équivalence.

Démonstration : c'est une relation réflexive car, pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M={}^tI_nMI_n$. Elle est symétrique car, si $M'={}^tPMP$, alors $M={}^tP^{-1}MP^{-1}$. Enfin c'est une relation transitive car si $M''={}^tP'M'P'$ et $M'={}^tPMP$, alors $M''={}^tP'({}^tPMP)P'={}^t(PP')M(PP')$ et PP' est bien une matrice inversible. □

1.4. Recherche de la forme bilinéaire associée à une forme quadratique

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Une forme bilinéaire symétrique φ est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y)={}^tXMY=\sum_{i,j}m_{ij}x_iy_j$ où M est la matrice symétrique réelle définie par $m_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$.

Une forme quadratique s'écrit donc sous la forme :

$$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j .$$

Réciproquement, si on se donne une forme quadratique q, on a alors

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j .$$

Pour retrouver la forme bilinéaire associée φ à q, on utilise la règle du dédoublement des termes :

- on remplace les termes x_i^2 par $x_i y_i$
- on remplace le terme $x_i x_j$ par $\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$

On vérifie que, pour φ ainsi construite, on a bien $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$.

2. Rang d'une forme bilinéaire

Soient φ une forme bilinéaire définie sur un espace vectoriel E de dimension finie et x et y deux vecteurs de E.
On définit deux formes linéaires φ_x et φ^y de E par

$$\begin{aligned} \forall y \in E, \quad & \varphi_x(y) = \varphi(x,y) \\ \forall x \in E, \quad & \varphi^y(x) = \varphi(x,y) \end{aligned}$$

Notons E^* le dual de E (c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires définies sur E).
Les deux applications de E dans E^* définies par $x \mapsto \varphi_x$ et $y \mapsto \varphi^y$ sont linéaires de E dans E^*.
Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, M la matrice de φ dans cette base et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. On a, pour tout $1 \leq i,j \leq n$, $m_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ donc la matrice ${}^tM$ (respectivement M) représente l'endomorphisme $x \mapsto \varphi_x$ (respectivement $x \mapsto \varphi^y$) de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.
En effet, la $j$ème colonne de la matrice représentant l'endomorphisme $x \mapsto \varphi_x$ dans les bases définies précédemment est la matrice-colonne des coordonnées de φ_{e_j} dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Posons $\varphi_{e_j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*$. Comme $\varphi_{e_j}(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_k) = \lambda_k = \varphi(e_j, e_k)$, la matrice représentant l'endomorphisme $x \mapsto \varphi_x$ de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ dans la base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est donc bien ${}^tM$. De même, pour $y \mapsto \varphi^y$.
Définition 12 – On appelle rang d'une forme bilinéaire φ définie sur un espace vectoriel E de dimension finie le rang commun de ces deux applications.
On dit que φ est non dégénérée si son rang est égal à la dimension de E. Elle est dite dégénérée sinon.

Proposition 13 – Une forme bilinéaire est non dégénérée si et seulement si la matrice qui la représente dans une base donnée de E est inversible.
Elle est dégénérée si et seulement s'il existe $x \neq 0$ tel que, pour tout $y \in E$, $\varphi(x,y) = 0$.

Définition 14 – On appelle noyau de la forme quadratique q, et on note $\operatorname{Ker} q$, l'ensemble $\{y \in E \,;\, \varphi(x,y) = 0\}$.

Proposition 15 – $\operatorname{Ker} q$ est un sous-espace vectoriel de E.

Corollaire 16 – Une forme bilinéaire φ est non dégénérée si et seulement si $\operatorname{Ker} q = \{0\}$, où q est la forme quadratique associée à φ.

Définition 17 – On dit qu'une forme quadratique q est définie si on a, pour tout $x \in E$, $(x \neq 0 \Longrightarrow q(x) \neq 0)$.

Proposition 18 – Si q est une forme quadratique définie, alors sa forme bilinéaire associée est non dégénérée.

Démonstration : montrons la contraposée. Soit φ une forme bilinéaire dégénérée, alors il existe $x \neq 0$ tel que, pour tout $y \in E$, $\varphi(x, y) = 0$. En particulier $q(x) = \varphi(x, x) = 0$. Donc q est non définie. □

Remarque - La réciproque est fausse. Il existe des formes bilinéaires non dégénérées ayant une forme quadratique non définie. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ est non dégénérée et $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ est non définie car $q(1, 1) = 0$.

3. Formes quadratiques positives

Définition 19 – Une forme quadratique q de E est dite positive si, pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$.

Théorème 20 – (Cauchy-Schwarz)
Soit q une forme quadratique positive et φ sa forme bilinéaire symétrique associée. On a alors, pour tout $(x, y) \in E \times E$

$$\boxed{[\varphi(x, y)]^2 \leq q(x)q(y)}$$

De plus, si q est définie, l'égalité n'est réalisée que si x et y sont proportionnels.

Démonstration : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $q(x + ty) \geq 0$.
En développant, on obtient $t^2q(y) + 2t\varphi(x, y) + q(x) \geq 0$.
Si $q(y) = 0$, alors nécessairement $\varphi(x, y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée.
Si $q(y) \neq 0$, alors nécessairement le discrimant du trinôme est négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité.
Supposons de plus q définie avec $\varphi(x, y)^2 = q(x)q(y)$.
Si $q(y) = 0$, alors $y = 0$ et x et y sont proportionnels.
Si $q(y) \neq 0$, alors le discriminant du trinôme s'annule et donc le trinôme s'annule aussi. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $q(x + ty) = 0$. Or q est définie donc $x + ty = 0$. □

Remarque - L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de montrer qu'une forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique positive est continue.

Théorème 21 – (Minkowski)
Soit q une forme quadratique positive sur E. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\boxed{\sqrt{q(x + y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}}$$

De plus, si q est définie, l'égalité n'est vérifiée que s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$ ou si $x = 0$.

Démonstration : $q(x + y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y) \leq q(x) + 2\sqrt{q(x)q(y)} + q(y)$ d'après l'inégaltié de Cauchy-Schwarz donc $q(x + y) \leq \left(\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}\right)^2$.
Supposons q définie et l'égalité vérifiée. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors également vérifiée. Donc on a soit $x = 0$ soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$.
Or $\varphi(x, \lambda x) = \sqrt{q(x)}\sqrt{q(\lambda x)} \geq 0$ donc $\lambda q(x) \geq 0$, i.e. $\lambda \geq 0$. La réciproque est évidente.
□

4. Décomposition en carrés d'une forme quadratique : méthode de Gauss

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x \in E$, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ ses coordonnées dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soit q une forme quadratique non nulle définie sur E. Pour tout $x \in E$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{ij} x_i x_j .$$

Proposition 22 – Il existe n formes linéaires $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ définies sur E **linéairement indépendantes** et n réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que, pour tout $x \in E$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(\ell_i(x)\big)^2 .$$

Démonstration : par récurrence sur n. Si $n = 1$, le résultat est évident.
Supposons que toute forme quadratique de $n-1$ variables s'écrit comme la somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

- *1er cas : il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $m_{ii} \neq 0$.*
  Supposons (quitte à renuméroter les variables) que $i = 1$; on écrit

  $$q(x) = m_{11} x_1^2 + 2x_1 \Big(\sum_{j=2}^{n} m_{1j} x_1 x_j\Big) + R(x_2, \ldots, x_n)$$

  où R est une forme quadratique de $n-1$ variables. Posons $f(x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=2}^{n} m_{1j} x_1 x_j$;

  f est une forme linéaire sur E. On écrit alors

  $$\begin{aligned} q(x) &= m_{11} \left[x_1 + \frac{f(x_2, \ldots, x_n)}{m_{11}} \right]^2 - \frac{f^2(x_2, \ldots, x_n)}{m_{11}} + R(x_2, \ldots, x_n) \\ &= m_{11} \left[x_1 + \frac{f(x_2, \ldots, x_n)}{m_{11}} \right]^2 + S(x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

  où S est une forme quadratique de $n-1$ variables. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut alors écrire q comme la somme des carrés de n formes linéaires ; elles sont bien linéairement indépendantes d'après l'hypothèse de récurrence et le fait que l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \dfrac{f(x_2, \ldots, x_n)}{m_{11}}$ est indépendante des $n-1$ autres qui ne contiennent pas x_1.
- *2ème cas : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $m_{ii} = 0$.*
  Alors il existe $m_{ij} \neq 0$ avec $i \neq j$ (car la forme quadratique est non nulle). Supposons (quitte à renuméroter les variables) que $m_{12} \neq 0$; on écrit

  $$q(x) = m_{12} x_1 x_2 + x_1 f(x_2, \ldots, x_n) + x_2 g(x_3, \ldots, x_n) + T(x_3, \ldots, x_n)$$

  où f et g sont des formes linéaires et T une forme quadratique. On a alors

  $$\begin{aligned} q(x) &= m_{12} \left[(x_1 + \frac{g}{m_{12}})(x_2 + \frac{f}{m_{12}}) - \frac{fg}{m_{12}^2} \right] + T \\ &= \frac{m_{12}}{4} \left[\Big(x_1 + x_2 + \frac{f+g}{m_{12}}\Big)^2 - \Big(x_1 - x_2 + \frac{g-f}{m_{12}}\Big)^2 \right] + T - \frac{fg}{m_{12}} \end{aligned}$$

$T - \dfrac{fg}{m_{12}}$ est une forme quadratique de $n-1$ variables ; on peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence et on conclut comme précédemment.

On a alors prouvé le résultat par récurrence. □

Remarque - La méthode de Gauss est une méthode algorithmique. On verra plus loin qu'elle permet de trouver explicitement une base de E orthogonale pour q et de déterminer la signature de q.

5. Bases orthogonales

5.1. Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une forme bilinéaire symétrique φ. On note q la forme quadratique associée.

Définition 23 – Deux éléments x et y de E sont dits orthogonaux s'ils vérifient $\varphi(x, y) = 0$.

Définition 24 – On dit que la base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est orthogonale si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ dès que $i \neq j$.

Proposition 25 – Une base de E est orthogonale pour la forme quadratique q si et seulement si la matrice de q dans cette base est diagonale.

Démonstration : la matrice Q de q dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est définie par $Q_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Elle est donc diagonale si et seulement si $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. □

Proposition 26 – Soit q une forme quadratique. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E orthogonale pour q, alors les vecteurs e_i tels que $q(e_i) = 0$ forment une base du noyau de q.

Démonstration : soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E orthogonale pour q et Q la matrice de q dans cette base. Q est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $q(e_1), \ldots, q(e_n)$. Or, si $q(e_j) \neq 0$, alors e_j n'appartient pas au noyau de q et si $q(e_j) = 0$, alors e_j est orthogonal à tous les vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ donc à tous les vecteurs de E. On en déduit que e_j appartient au noyau de q.
Réciproquement, soit x un vecteur du noyau de q. Posons $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varphi(e_i, x) = 0$. Or $\varphi(e_i, x) = x_i q(e_i)$. Donc si $q(e_i) \neq 0$, alors $x_i = 0$ et on a montré que x est combinaison linéaire des vecteurs e_i tels que $q(e_i) = 0$. Ces vecteurs forment alors bien une base du noyau de q. □

Remarque - Si q est non dégénérée, alors son noyau est réduit au vecteur nul.

5.2. Construire une base orthogonale

Soit q une forme quadratique définie sur un espace euclidien E. On note φ la forme bilinéaire symétrique associée à q.

Théorème 27 – Soient $\ell_1, \ldots, \ell_p$ des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$ linéairement indépendantes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des réels tous non nuls tels que
$$q(x) = \alpha_1 \big(\ell_1(x)\big)^2 + \cdots + \alpha_p \big(\ell_p(x)\big)^2.$$
Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E orthogonale pour q telle que $q(e_i) = \alpha_i$.

Démonstration : complétons le système $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de E^*. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base duale. On a alors $\varphi(e_i, e_j) = \alpha_1 \ell_1(e_i)\ell_1(e_j) + \cdots + \alpha_p \ell_p(e_i)\ell_p(e_j)$. Or, par construction, $\ell_k(e_i)\ell_k(e_j) = \delta_{ik}\delta_{jk}$. Donc, si $i \neq j$, alors $\ell_k(e_i)\ell_k(e_j) = 0$. On en déduit que, si $i \neq j$, alors $\varphi(e_i, e_j) = 0$. La base $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc orthogonale pour q. De plus, $q(e_i) = \alpha_i \ell_i(e_i)\ell_i(e_i) = \alpha_i$. □

Corollaire 28 – Pour toute forme quadratique q sur E, il existe des bases orthogonales de E pour q.

Corollaire 29 – Soient $\ell_1, \ldots \ell_p$ des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$ linéairement indépendantes et $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des réels tous non nuls tels que

$$q(x) = \alpha_1\big(\ell_1(x)\big)^2 + \cdots + \alpha_p\big(\ell_p(x)\big)^2.$$

La forme quadratique q est positive si et seulement si les α_i sont tous positifs.
La forme quadratique q est définie positive si et seulement si $p = n$ et les α_i sont tous positifs.

5.3. Signature d'une forme quadratique

Soit q une forme quadratique définie sur un espace euclidien E. On note φ la forme bilinéaire symétrique associée à q.

Théorème 30 – (loi d'inertie de Sylvester)
Il existe un couple (s, t) d'entiers naturels tel que, pour toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E orthogonale pour q, où s est le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) > 0$ et t est le nombre de vecteurs e_i tels que $q(e_i) < 0$.

Définition 31 – Le couple (s, t) s'appelle la signature de la forme quadratique q.
Démonstration : soient $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux bases orthogonales pour la forme quadratique q. Notons s (respectivement s') le nombre de vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ (respectivement $(f_1, \ldots, f_n)$) tels que $q(e_i) > 0$ (respectivement $q(f_i) > 0$) et t (respectivement t') le nombre de vecteurs de la base $(e_1, \ldots, e_n)$ (respectivement $(f_1, \ldots, f_n)$) tels que $q(e_i) < 0$ (respectivement $q(f_i) < 0$). Le rang de q est égal au rang de la matrice de q dans l'une des deux bases donc rang $q = s + t = s' + t'$.
Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_i tels que $q(e_i) > 0$. On a $\dim F = s$. Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les f_i tels que $q(f_i) \leq 0$. On a $\dim G = n - s'$. Or $F \cap G = \{0\}$. En effet, si $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, alors $q(x) = x_1^2 q(e_1) + \cdots + x_n^2 q(e_n)$. Donc, si $x \in F \setminus \{0\}$, alors $q(x) > 0$. De même, si $x = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$, alors $q(x) = \alpha_1^2 q(f_1) + \cdots + \alpha_n^2 q(f_n)$. Donc, si $x \in G$, alors $q(x) \leq 0$.
On a alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = s + n - s' \leq \dim E = n.$$

On a donc montré que $s \leq s'$. Un raisonnement similaire (en échangeant le rôle des bases) permet de montrer que $s' \leq s$. On en déduit que $s = s'$, puis que $t = t'$ par l'égalité $s + t = s' + t'$. □

6. Produit scalaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

6.1. Espace euclidien

Définition 32 – On appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique telle que la forme quadratique associée soit définie positive.
On appelle espace euclidien un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Proposition 33 – φ est un produit scalaire sur E si et seulement si il existe une base de E orthogonale pour q, forme quadratique associée à φ, dans laquelle la matrice de q est la matrice identité.

Démonstration : c'est une conséquence immédiate de la proposition 25. □

Corollaire 34 – Si E est de dimension n, la forme bilinéaire symeétrique associée à une forme quadratique q est un produit scalaire si et seulement si la signature de q est égale à $(n, 0)$.

Proposition 35 – Soit (E, φ) un espace euclidien. L'application $x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E dite norme euclidienne. On notera $\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)}$.

Théorème 36 – Soit (E, φ) un espace euclidien de dimension finie. L'application $x \mapsto \varphi_x$ de E dans E^* est un isomorphisme canonique où on a noté φ_x la forme linéaire de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x, y)$.

On déduit de ce théorème :

toute application linéaire f de E dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\varphi(x, .)$, c'est-à-dire :

$$\exists! x \in E, \forall y \in E,\ f(y) = \varphi(x, y).$$

Démonstration : il est clair que $\varphi_x \in E^*$ et que l'application qui, à $x \in E$, associe φ_x est linéaire. Vérifions qu'elle est injective. Soit $x \in E$ tel que $\varphi_x = 0$. On a alors, en particulier, $\varphi(x, x) = 0$. Or φ est un produit scalaire donc $x = 0$. Comme $\dim E = \dim E^*$, on en déduit que l'application considérée est bien un isomorphisme. □

6.2. Orthogonalité

Soit A une partie d'un espace euclidien (E, φ).

Proposition 37 – L'ensemble $A^{\perp} = \{y \in E\,;\, \forall x \in A, \varphi(x, y) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé orthogonal de E.
D'après le théorème 36, il s'identifie à $\{f \in E^*\,;\, \forall x \in A, f(x) = 0\}$.

Démonstration : c'est une conséquence de la linéarité à droite du produit scalaire φ. □

Proposition 38 – Soit H un sous-espace vectoriel de E, on a $H \oplus H^{\perp} = E$.

*Démonstration : montrons que $H \cap H^{\perp} = \{0\}$.
Soit $x \in H \cap H^{\perp}$. On a donc $\varphi(x, x) = 0$; or φ est un produit scalaire donc $x = 0$.
Montrons ensuite que $H + H^{\perp} = E$, c'est-à-dire que tout élément a de E s'écrit comme la somme d'un élément de H et d'un élément de $H^{\perp}$. Soit $a \in E$ et $f : F \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in E$, par $f(x) = \varphi(a, x)$. (H, φ) est un espace eucliien et $f \in H^*$, donc, d'après le théorème 36, il existe $h \in H$ tel que $f(x) = \varphi(h, x)$ pour tout $x \in H$. Posons $b = a - h$. Alors, pour tout $x \in H$, on a*

$$\varphi(b, x) = \varphi(a, x) - \varphi(h, x) = f(x) - \varphi(h, x) = f(x) - f(x) = 0.$$

*On en déduit que $b \in H^{\perp}$. On a alors $a = b + h$ avec $h \in H$ et $b \in H^{\perp}$.
Comme $H \cap H^{\perp} = \{0\}$ et que $H + H^{\perp} = E$, on peut conclure que $E = H \oplus H^{\perp}$.* □

Remarque - On peut également définir l'orthogonal d'un sous-espace F d'un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire, mais dans ce cas F et $F^{\perp}$ ne sont pas nécessairement supplémentaires (ils peuvent avoir un vecteur non nul en commun).

Théorème 39 – (Pythagore)
Soit $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration : il suffit de développer $\|x + y\|^2 = \varphi(x + y, x + y)$ en utilisant la bilinéarité de φ pour prouver l'équivalence. □

Proposition 40 – Il existe dans E des bases formées de vecteurs 2 à 2 orthogonaux. Plus généralement, tout système de vecteurs non nuls formé de vecteurs 2 à 2 orthogonaux est libre.

Démonstration : soit $(e_1, \ldots, e_p)$ un système de p vecteurs non nuls de E 2 à 2 orthogonaux. Montrons qu'ils forment une famille libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p réels tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0.$$

On a, d'une part $\varphi(e_k, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i) = 0$ car $\varphi(x, 0) = 0$ pour tout $x \in E$ et, d'autre part, $\varphi(e_k, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i) = \lambda_k \varphi(e_k, e_k)$ car les vecteurs sont orthogonaux 2 à 2. Or $e_k \neq 0$ et φ est définie, donc $\lambda_k = 0$. □

Définition 41 – Une base est orthonormée si elle est formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux et de norme 1.

6.3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Le procédé de Gram-Schmidt est un algorithme qui permet, à partir d'une base quelconque $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un espace vectoriel euclidien E, de construire une base orthonormée.
Pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, on note E_p le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_p$. On a $\dim E_p = p$ car son système générateur est libre en tant que sous-famille d'une famille libre. On construit une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E de la manière suivante :

1) On pose $e_1 = u_1$. On détermine un réel λ tel que le vecteur $u_2 + \lambda u_1$ soit orthogonal à e_1, c'est-à-dire tel que $\varphi(e_1, u_2 + \lambda u_1) = 0$. Par bilinéarité, on trouve une seule solution

$$\lambda = \frac{\varphi(e_1, u_2)}{\varphi(e_1, u_1)}.$$

$\varphi(e_1, u_1) = \varphi(u_1, u_1)$ est bien non nul car φ est définie et $u_1 \neq 0$.
On pose alors $e_2 = u_2 + \lambda_1 u_1$, e_2 est non nul car (u_1, u_2) est un système libre. (e_1, e_2) est alors une base orthogonale de E_2.

2) Soit p un entier compris entre 2 et $n - 1$. Supposons que l'on ait construit une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E_p formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux. Quels que soient les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, le vecteur $e_{p+1} = u_{p+1} + \lambda_p e_p + \cdots + \lambda_1 e_1$ est non nul, car u_{p+1} n'appartient pas à E et n'est donc pas combinaison linéaire de $e_1, \ldots, e_p$. De plus

$$\varphi(e_{p+1}, e_i) = \varphi(u_{p+1}, v_i) + \lambda_i \varphi(e_i, e_i).$$

Pour tout entier $j \in \{1, \ldots, p\}$, on a $\varphi(e_i, e_i) \neq 0$ car φ est définie et $e_i \neq 0$. On peut déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de manière unique en supposant que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\varphi(e_{p+1}, e_i) = 0$. Le vecteur non nul e_{p+1} ainsi déterminé est orthogonal à chaque e_j pour $1 \leq j \leq p$. Les vecteurs non nuls $e_1, \ldots, e_{p+1}$ sont 2 à 2 orthogonaux ; ils forment donc une base orthogonale de E_{p+1}.

On a ainsi construit, à partir de la base $(u_1, \ldots, u_n)$, une base orthogonale de E ayant de plus la propriété suivante :
pour tout entier $p \in \{1, \ldots, n\}$, le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_p$.
Pour obtenir une base orthonormée, il suffit ensuite de normer chacun des vecteurs en posant $e'_i = e_i / \|e_i\|$.
On a également le résultat plus précis suivant :

Théorème 42 – Soient (E, φ) un espace euclidien de dimension n et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Il existe une et une seule base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k) \text{ et } \varphi(e_k, u_k) > 0$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration : on raisonne par récurrence sur n.
Si $n = 1$, on pose $e_1 = u_1/\|u_1\|$ (où $\|u_1\| = \sqrt{\varphi(u_1, u_1)}$)
Supposons $n \geq 2$ et le résultat prouvé à l'ordre $n - 1$.
Si e_n existe, il s'écrit $e_n = \lambda u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$ avec $(\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Comme les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ doivent être orthogonaux deux à deux, on a $0 = \lambda\varphi(e_n, u_i) + \alpha_i$. Donc $e_n = \lambda y$ avec $y = \left(e_n - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(e_n, u_i)e_i\right)$. Or $e_n \notin \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1}) = \text{Vect}(u_1, \ldots u_{n-1})$, donc $y \neq 0$.
De plus,

$$\varphi(e_n, u_n) = \lambda\|y\|^2.$$

Pour avoir $\varphi(e_n, u_n) > 0$, il faut et il suffit que $\lambda > 0$. Comme, de plus, $\|e_n\| = 1$, on a $\lambda = \|u|^{-1}$. Le vecteur e_n est donc déterminé de manière unique.
Réciproquement, on vérifie que la famille ainsi construite convient. □

6.4. Changement de bases orthonormées - Matrices orthogonales

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Proposition 43 – Si P est la matrice de passage de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ à la base $(u_1, \ldots, u_n)$ de E, alors $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base orthonormée si et seulement si ${}^tPP = \mathrm{I}_n$.

Démonstration : le $j$ème vecteur colonne de la matrice P représente les coordonnées du vecteur u_j dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Le coefficient $({}^tPP)_{ij}$ représente donc le produit scalaire du vecteur u_i par le vecteur u_j. D'où le résultat. □

Définition 44 – On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si l'on a ${}^tMM = \mathrm{I}_n$.

Corollaire 45 – Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs-colonnes forment une base orthonormée de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

Proposition 46 – Soit M une matrice orthogonale. Alors elle est inversible et $M^{-1} = {}^tM$. De plus, son déterminant est égal à 1 ou à -1.

Démonstration : comme ${}^tPP = I_n = P{}^tP$, la matrice P est inversible et son inverse est égal à sa transposée. De plus, Dét$({}^tPP)$ = Dét$(P)^2$ = Dét$(I_n) = 1$ donc Dét$(P) = \pm 1$. □

Proposition 47 – L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, noté O_n, est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles ; on l'appelle groupe orthogonal. L'ensemble des matrices de $\mathscr{O}_n$ qui sont de déterminant 1, noté SO_n, est un sous-groupe de O_n ; on l'appelle groupe spécial orthogonal.

Démonstration : on vérifie que le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale et que l'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale, ce qui permet de montrer que O_n est un sous-groupe du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles. De même pour SO_n. □

FORMES QUADRATIQUES